

FRACTAL AND FITTING

分形与拟合



沙 震 阮火军 编著





浙江大學出版社



封面设计：宋纪浔



ISBN 7-308-04125-5/O・320　定价：12.00元

分形与拟合

FRACTAL AND FITTING

沙　震　阮火军　编著

浙江大學出版社

图书在版编目（CIP）数据

分形与拟合 / 沙震，阮火军编著. —杭州：浙江大学出版社，2005.3
ISBN 7-308-04125-5

Ⅰ.分… Ⅱ.①沙…②阮… Ⅲ.分形几何
Ⅳ.O189.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 016282 号

责任编辑 徐素君
出版发行 浙江大学出版社
（杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027）
（E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版 浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷 浙江大学印刷厂
开　　本 850mm×1168mm 1/32
印　　张 6.75
字　　数 170 千
版 印 次 2005 年 3 月第 1 版 2005 年 3 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 7-308-04125-5/O·320
定　　价 12.00 元

内容简介

本书共分六章．前三章介绍了分形几何中最重要的基础知识，主要包括分形集概念、分形集的维数和迭代函数系的理论．后三章主要论述分形几何在图象压缩、曲线拟合应用中的理论和方法．

本书可作为数学系高年级本科生或相关专业研究生的教材或参考书，也可供对分形理论或应用感兴趣的读者学习参考．

前　言

分形几何是现代非线性科学中一个十分重要的研究领域，它的思想和方法已经渗透到自然科学中的各个领域．图象压缩和曲线拟合原来分别是属于信息科学和应用数学中的研究课题，但经 Barnsley 等人开创性的工作，将它们与分形几何联系了起来．他们发明了分形图象压缩技术，这是一种新的、十分有效的方法，取得了巨大成功，引起了各国研究者的浓厚兴趣．在 1986 年 Barnsley 又提出了分形插值函数概念，它也是一种新的插值方法，特别在非光滑曲线的拟合中显示其独特的优越性．这类分形插值函数，是定义在区间上的连续函数，但它不是用显式表达式来定义的，而是由一组映射所生成的吸引子来确定的．研究这类函数的一些性质 (例如光滑性等) 相当困难，目前只有在较简单的情况下有些结果．在研究方法上，传统的一些分析方法一般不能直接利用，因而必须开辟一些新的方法和理论．为此分形插值为函数论提供了一个崭新的研究领域．本书的目的之一就是为了抛砖引玉，希望能引起广大读者的注意并加入到这一研究领域中来．

作者多年来为函数逼近论方向的研究生及工科研究生开设了

《分形基础及应用》课程．本书是在该课程讲义的基础上，经多次修改和扩充而编写成的．本书可作为数学系高年级本科生或相关专业研究生的教材或参考书，也可供对分形理论或应用感兴趣的读者学习参考．

全书共分六章．第一章从一些典型的分形集开始，介绍分形的概念．第二章介绍 Hausdorff 维数及 Box 维数．第三章讲述迭代函数系的理论．第四章介绍拼贴定理及其应用．第五章介绍分形插值函数的定义、维数、光滑性以及它的微积分．第六章讨论分形插值拟合问题，介绍了分形插值的误差及拟合方法．

感谢浙江大学数学系尹永成教授和汪国昭教授对本书的大力支持和帮助．

感谢董斌博士和周洪岳博士为本书提供了有关的计算机程序．

感谢刘寅立硕士为本书的编辑排版提供了很大的帮助．

感谢我们的导师郭竹瑞教授的关心和支持．

感谢浙江大学出版社徐素君女士的鼓励和支持．

本书作者的研究工作得到了国家自然科学基金、浙江省自然科学基金的支持，在此表示深切的感谢．

由于作者学识浅薄，掌握资料有限，书中错误、不当之处在所难免，敬请读者批评指正．

沙震　阮火军
2005 年元月

目 录

第一章　分　形　集

§1.1　引　论

在经典的欧几里得几何中，人们可以用直尺与圆规去画线段、矩形、三角形和圆等规则的图形，又用这些图形去描述一些常见的物体，例如墙壁、车轮、桌子等. 这是很自然的，因为这些对象本身就是由这些规则图形拼装而成的. 然而自然界是很复杂的，还存在着许多极其复杂、不规则的物体，譬如海岸线、山峰的边缘、人的血管系统等. 同时在科学研究中也常会遇到一些振荡曲线，如地震波、脑电波之类的图形. 所有这些很难用欧氏几何来描述. 下面再举两个有趣的例子.

给定一个映射 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$，取 $p_0\in\mathbb{R}^2$ 为初始点，作迭代序列:

$$p_0,\ f(p_0),\ f(f(p_0)),\ f(f(f(p_0))),\ \ldots$$

为了方便，用 f^k 表示 f 的 k 重复合 $\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{k\text{ 个}}$，并规定 $f^0(p_0)=$

p_0，则上述序列可改写成：

$$f^0(p_0),\ f^1(p_0),\ f^2(p_0),\ f^3(p_0),\ \cdots \qquad (*)$$

现在观察这个迭代序列最终会有什么结果?

一、 **Martin 过程**

取映射 f:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - \mathrm{sgn}(x)\sqrt{|bx-c|} \\ a - x \end{pmatrix},$$

其中

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0\,, \\ 0, & x = 0\,, \\ -1, & x < 0\,. \end{cases}$$

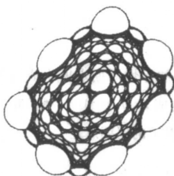
由该 f 产生的迭代过程 $(*)$，是由 Barry Martin 提出的，所以称为 Martin 过程.

Martin 过程是从一个初始点出发来生成图形的. 一般令 $p_0 = (0,0)$. 经过计算后生成一个新点，在屏幕上打上该点. 然后以这个新点的坐标作为 (x, y)，进行下一次迭代，得到又一个新点，再在屏幕上打上这点. 如此不断进行下去，最终将在屏幕上出现一幅奇妙的图案. 参数 a, b, c 完全决定了 Martin 图的形态，图 1.1 是不同参数时的图形，它们都迭代了 50 万次.

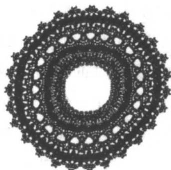
二、 **Julia 集**

取 f 是复平面 $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 的 n 阶多项式，即

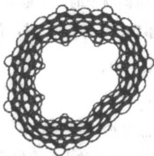
$$f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i \quad (n \geqslant 2).$$



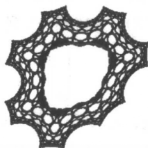
$a=68, b=75, c=83$



$a=-200, b=-4, c=-80$



$a=-137, b=17, c=4$



$a=-536, b=102, c=67$

图 1.1 不同参数下的 Martin 图

设 $w\in\mathbb{C}$，若 $f(w)=w$，则称 w 为 f 的不动点．又如果存在某个正整数 p，有 $f^p(w)=w$，则称 w 是 f 的周期点．而使 $f^p(w)=w$ 成立的最小的 p，称为 w 的周期．$\{w, f(w), \cdots, f^{p-1}(w)\}$ 称为它的周期轨道．设 w 是周期 p 的周期点，记 $\lambda=(f^p)'(w)$．

1° 若 $\lambda=0$，则称 w 是超吸引的;

2° 若 $0\leqslant|\lambda|<1$，则称 w 是吸引的;

3° 若 $|\lambda| = 1$，则称 w 是中性的；

4° 若 $|\lambda| > 1$，则称 w 是斥性的.

所谓 f 的 Julia 集 $J(f)$ 就是由 f 的斥性周期点所组成的集合的闭包*. 先举一个简单的例子来说明，设 $f(z) = z^2$，此时有 $f^k(z) = z^{2^k}$. 由方程 $f^p(w) = w$ 可解得 f 的周期点是

$$w_q = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{2^p-1}\cdot q}, \qquad q = 0, 1, \cdots, 2^p - 2.$$

容易验证 $|(f^p)'(w_q)| = 2^p \geqslant 2$，因此这些 w_q 都是斥性周期点. 可见所有的斥性周期点是稠密地分布在单位圆周上的，于是 $J(f)$ 就是单位圆周. 我们再注意到下面的简单事实：当 $k \to \infty$ 时，有

$$\begin{cases} f^k(z) \to 0, & \text{如果 } |z| < 1, \\ f^k(z) \to \infty, & \text{如果 } |z| > 1. \end{cases}$$

就是说，对 $|z| < 1$ 的点，经迭代后都将被吸引到原点；而当 $|z| > 1$ 时，经迭代后将趋于无穷. 只有 $|z| = 1$ 的点经迭代后仍停留在单位圆周上. 这样平面被分成两个区域，而它们的边界就是 $f(z) = z^2$ 的 Julia 集 $J(f)$.

现在若稍微变动一下，令 $f(z) = z^2 + C$，当 C 为非零值时，情况就很不一样. 例如 $C = -0.12375 + 0.56508\,\mathrm{i}$ 时，经迭代后，虽仍出现上面三种情况，但内部吸引子不再是零点，而且边界 (即 f 的 Julia 集) 变得不光滑了 (见图 1.2 的边界)，这边界与海岸线很相似，Mandelbrot 称它有分形结构.

在计算机上画映射 $f(z) = z^2 + C$ 的 Julia 集并不困难，可采用逃逸时间算法 (escape time algorithm)，它的原理是这样的：

*闭包概念可参考本书第三章.

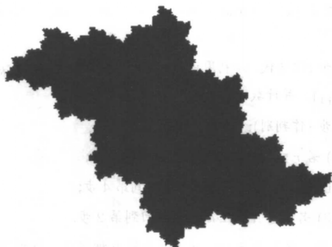


图 1.2 Julia 集

令 $z=x+\mathrm{i}y$，$C=p+\mathrm{i}q$. 由映射 $f(z)=z^2+C$ 可得迭代过程

$$\begin{cases} x_{k+1}=x_k^2-y_k^2+p, \\ y_{k+1}=2x_ky_k+q. \end{cases} \tag{**}$$

设显示器的分辨率为 $M\times N$，用 $K+1$ 种颜色显示 Julia 集合 (例如，可取 $K=200$)，编号从 $0\sim K$，0 为黑色.

第 0 步：选定参数 $C=p+\mathrm{i}q$，取 $x_{\min}=y_{\min}=a$ (例如 -1.5)，$x_{\max}=y_{\max}=b$ (例如 1.5)，取 R 充分大 (例如 100). 定义发散区域 $V=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2>R^2\right\}$，当某轨道进入区域 V 时，就认为该轨道是发散的.

设 $\Delta x=(x_{\max}-x_{\min})/(M-1)$，$\Delta y=(y_{\max}-y_{\min})/(N-1)$. 对所有象素点 (n_x,n_y)，$n_x=0,1,\cdots,M-1$，$n_y=0,1,\cdots,N-1$，完成下面的过程.

第 1 步：设 $x_0 = x_{\min} + n_x \cdot \Delta x$, $y_0 = y_{\min} + n_y \cdot \Delta y$, $k = 0$.

第 2 步 (作迭代)：利用迭代方程 (**) 作迭代，由 (x_k, y_k) 计算 (x_{k+1}, y_{k+1})，并计数 $k = k + 1$.

第 3 步 (作判别)：计算 $r = x^2 + y^2$，

(i) 若 $r > R$，取颜色 k，转到第 4 步；

(ii) 若 $k = K$，取颜色 0，转到第 4 步；

(iii) 若 $r \leqslant R$，且 $k < K$，回到第 2 步.

第 4 步：在象素点 (n_x, n_y) 上着第 k 种颜色，转到下一个点，并从第 1 步开始.

图 1.3 中四幅图都是用逃逸时间算法画的.

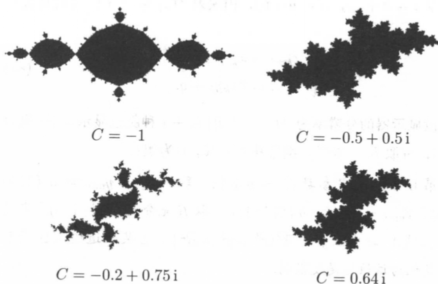


图 1.3 Julia 集

我们看到，由 Martin 过程产生的图以及 Julia 集一般都是极其

复杂的，用欧氏几何去描述它们是不可能的，而这些都将是分形几何的研究对象，当然对这类问题的研究是很困难的. 作为分形几何完整理论的建立可能还需要长时间的艰苦努力，但分形这个词语已不陌生，它已为许多理论及实践工作者所熟悉.

分形(Fractal)这个新的术语是美籍法国数学家B.B.Mandelbrot于1975年创造的. *Fractal*出自拉丁语*fractus*(碎片，支离破碎)、英文*fractured*(断裂)和*fractional*(碎片，分数)，说明分形是用来描述和处理粗糙、不规则的对象. 1982年他的名著*The Fractal Geometry of Nature*出版，分形这个概念被广泛传播，成为当时全球科学家们议论最为热烈、最感兴趣的热门话题之一. 除了物理学家、数学家、化学家、地震学家、材料学家之外，经济学家、音乐家乃至画家、电影制作者都参加到这一行列中. 因此，当时一位美国物理学家J.A.Wheeler说：可以相信，明天谁不熟悉分形，谁就不能被认为是科学上的文化人.

现在分形几何已成为非线性科学中的一个重要分支，它的思想和理论已经渗透到自然科学中的各个领域. 在数学、材料科学、地质勘探、疾病诊断、计算机及信息科学领域中都得到了广泛的应用，尤其在下面三个方向上取得了十分可观的成就.

1° 图象、数据压缩方面的研究；

2° 自然景物的模拟；

3° 分形生长模型.

那么，什么是分形呢？遗憾的是，要给出确切的严格定义似乎还为时尚早. 为此，我们暂且不管如何去定义分形这个概念，而是去观察一些大家熟悉的分形集，它们有哪些共同的特点和性质.

§ 1.2 集合

集合是分形理论中一个基本的数学概念. 一个分形集实际上就是由某些特殊的点所组成的集合.

所谓集合 (或简称集), 乃是具有某种性质、可以互相区别的事物的全体, 通常用大写字母 $A, B, \cdots, X, \cdots$ 表示. 以后我们总是在 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中讨论分形问题, 为此, 遇到的集合都是 $\mathbb{R}^n$ 中的点集.

设 A 是一个集合, 当 a 是 A 中的一个元素时, 称 a 属于 A, 记为 $a \in A$. 若 a 不是 A 中的一个元素, 记作 $a \overline{\in} A$ 或 $a \notin A$. 不含任何元素的集合称为空集, 记作 $\varnothing$.

当集合 A 的元素都属于集合 B 时, 称集合 A 是集合 B 的子集, 或者说集合 A 包含于集合 B, 记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

当且仅当 $A \subset B$ 又 $B \subset A$ 时, 称集合 A 与集合 B 相等, 记作 $A = B$.

由集合 A 与集合 B 的一切元素组成的集合, 叫做集合 A 与集合 B 的并集, 记作 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

由集合 A 与集合 B 的公共元素组成的集合, 叫做集合 A 与集合 B 的交集, 记作 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

上述的并和交的运算可以推广到集合族上，记作

$$\bigcup_{\alpha\in N} A_\alpha=\{x|\exists\alpha\in N，使 x\in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha\in N} A_\alpha=\{x|\forall\alpha\in N，均有 x\in A_\alpha\},$$

其中 N 表示某指标集.

由集合 A 中不属于 B 的那些元素的全体组成的集合，称为 A 与 B 的差集，记为 $A-B$，即

$$A-B=\{x|x\in A 且 x\overline{\in}B\}.$$

设 S 是任意一个集合，$\{A_\alpha|\alpha\in N\}$ 是 S 中的一族子集，那么下面两个公式成立:

$$S-\bigcup_{\alpha\in N} A_\alpha=\bigcap_{\alpha\in N}(S-A_\alpha),$$

$$S-\bigcap_{\alpha\in N} A_\alpha=\bigcup_{\alpha\in N}(S-A_\alpha).$$

集合 A 与集合 B 的积集定义为

$$A\times B=\{(x,y)|x\in A 且 y\in B\}.$$

在分形集的构造中，常遇到与集合序列（简称集列）有关的一些概念，下面介绍有关这方面的内容.

设 $A_1,A_2,\ldots,A_n,\ldots$ 是任一集列，由属于上述集列中无限多个集合的那种元素的全体组成的集合，称为这一集列的上限集，记作

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\quad(或\ \limsup_n A_n).$$

由属于集列中从某个指标(这个指标不是固定的，与元素有关)以后所有集合的那种元素的全体组成的集合，称为这一集列的下限集，记作

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n \quad (\text{或} \liminf_{n} A_n),$$

这就是说，若 $x \in \varliminf_{n\to\infty} A_n$，则总存在 $n_0(x)$，使得对任意 $n > n_0(x)$，都有 $x \in A_n$. 显然有

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup_{n\to\infty} A_n.$$

如果集列 $\{A_n\}$ 的上限集和下限集相等，即 $\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \varliminf_{n\to\infty} A_n$，则称集列 $\{A_n\}$ 是收敛的，这时称集合 $A \doteq \varlimsup_{n\to\infty} A_n = \varliminf_{n\to\infty} A_n$ 是 $\{A_n\}$ 的极限，记为

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

若集列 $\{A_n\}$ 满足条件

$$A_n \subset A_{n+1} \quad (\text{或} A_n \supset A_{n+1}), \qquad n = 1, 2, \cdots$$

则称 $\{A_n\}$ 是单调增加(减少)集列. 单调集列一定存在极限，且有

1° 若 $\{A_n\}$ 是单调增加的，则

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n;$$

2° 若 $\{A_n\}$ 是单调减少的，则

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

例 1.1. 在 $\mathbb{R}$ 中，$A_n = [0, 1 + 1/n]$，$n = 1, 2, \dots$ 是单调减少集列，它有极限集，且

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [0, 1].$$

§ 1.3 Cantor (康托) 三分集

记 $C_0 = [0, 1]$，将其三等分，去掉中间的 $1/3$ 部分，得 $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$。再把 C_1 的两个区间，分别三等分，又分别都去掉中间的 $1/3$ 部分，可得

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \bigcup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \bigcup \left[\frac{8}{9}, 1\right]. \tag{1.3.1}$$

按此步骤继续下去(见图 1.4)。由归纳可见，C_n 将由 2^n 个长度为 $1/3^n$ 的闭区间组成，即

$$C_n = \left[0, \frac{1}{3^n}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3^n}, \frac{3}{3^n}\right] \bigcup \cdots \bigcup \left[\frac{3^n - 1}{3^n}, 1\right]. \tag{1.3.2}$$

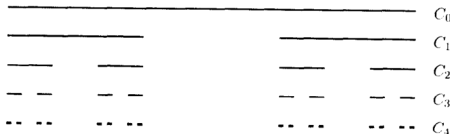


图 1.4 Cantor 三分集

易见，$\{C_n\}$ 是一递减集列：

$$C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_n \supset \cdots \tag{1.3.3}$$

于是该集列是收敛的，用 C 表示它的极限集，有

$$C = \lim_{n\to\infty} C_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n. \tag{1.3.4}$$

集合 C 称为 Cantor 三分集．下面给出 C 的几个简单性质：

1° C 不包含任何正长度的区间，并且它的长度为零.

2° C 没有孤立点，意思是说：如果点 $a \in C$，则对任何的 $\varepsilon > 0$，不管它多么小，在区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 中总包含 C 中不同于 a 的点.

3° C 是闭集*.

4° C 是自相似的．易见 $C \cap [0,1/3]$ 或 $C \cap [2/3,1]$ 都是与 C 本身相似的，其相似比为 1/3．换句话说，若将 $C \cap [0,1/3]$ 或 $C \cap [2/3,1]$ 放大 3 倍，可得整个 C．类似地，若将 $C \cap [0,1/9]$ 放大 9 倍，亦可得 C 本身．这种由一个集合的局部进行适当放大，可得集合本身的性质，称为自相似性.

为了描述 Cantor 三分集，将其集合中的点用三进制小数表示是很方便的．对于每个数 $x \in [0,1]$，可以用三进制小数展开：

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot 3^{-j}, \quad a_j \in \{0,1,2\}. \tag{1.3.5}$$

*闭集概念可参考本书第三章.

为了简单，记为 $x=(a_1a_2\cdots a_n\cdots)$. 对于形状是 $m/3^j$ ($0<m<3^j$ 是自然数) 的数，可有两种不同形式的展开，如

$$\frac{1}{3}=(1000\cdots)=(0222\cdots).$$

为了讨论方便，我们作如下规定. 若

$$x=m/3^j=a_1\cdot 3^{-1}+a_2\cdot 3^{-2}+\cdots+a_k\cdot 3^{-k},\quad \text{其中 } a_k\neq 0.$$

则当 $a_k=2$ 时，取 $x=(a_1a_2\cdots a_k000\cdots)$；当 $a_k=1$ 时，取 $x=(a_1a_2\cdots a_{k-1}a_k'222\cdots)$，其中 $a_k'=a_k-1=0$. 易见，在这种规定下，

$$\frac{1}{3}=(0222\cdots),\qquad \frac{2}{3}=(2000\cdots).$$

注意到除了形状是 $m/3^j$ 的这类数外，$[0,1]$ 中其他的数只有一种展开式.

定理 1.1. *设 $x\in[0,1]$，那么 $x\in C$ 的充分必要条件是：在 x 的展开式 (1.3.5) 中，有 $a_j=0$ 或 2，$\forall j$.*

证明 依照 Cantor 集的构造法，第一次从 $[0,1]$ 中去掉的区间是 $(1/3,2/3)$，在该区间中的点的三进制展开式的第一位数字是 1，而 C_1 中的点的三进制展开式的第一位数字是 0 或 2. 又第二次去掉的两个区间是 $(1/9,2/9)$ 及 $(7/9,8/9)$，它们中的点的三进制展开式分别有形式 $(01\cdots)$ 及 $(21\cdots)$. 而 C_2 中的点的三进制展开式中，第 1、2 位都不含数字 1. 依次类推，可见 $x\in C_n$ 的充要条件是其展开式中首 n 位数字都是 0 或 2. 由 $C=\bigcap_{n=0}^{\infty}C_n$，可知 C 中的点的三进制展开式中的数字都是 0 或 2. 反过来，若 x 的三进制展开

式中的所有数字都是 0 或 2，则对于所有的 n，$x \in C_n$ 成立，从而 $x \in C$. □

下面将从另外的角度去讨论 Cantor 集. 设 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，集合 $E \subset \mathbb{R}^n$，记

$$f(E) \doteq \{f(x)|x \in E\}.$$

若存在集合 $A \subset \mathbb{R}^n$，使得 $f(A) = A$，则称 A 是 f 的不变集. 注意到不变集不一定是唯一的. 例: $f(x) = x^2$，则 $\{0\},\{1\},\{0,1\}$ 都是它的不变集.

设给定 N 个函数 $f_i:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，$i = 1,2,\cdots,N$，定义

$$\left(\bigcup_{i=1}^{N} f_i\right)(E) \doteq \bigcup_{i=1}^{N} f_i(E), \qquad E \subset \mathbb{R}^n.$$

如果存在集合 $A \subset \mathbb{R}^n$，有

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(A).$$

则称 A 是函数系 $\{f_i\}_{i=1}^{N}$ 的不变集.

令

$$f_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}. \tag{1.3.6}$$

显然 $f_1:[0,1] \to [0,1/3]$，$f_2:[0,1] \to [2/3,1]$，因此

$$(f_1 \cup f_2)([0,1]) \subset [0,1].$$

定理 1.2. *设 C 是 Cantor 三分集，f_1, f_2 由(1.3.6)式定义，则有*

$$C = (f_1 \cup f_2)(C). \tag{1.3.7}$$

证明 设 $x=(a_1a_2\cdots)$，则

$$f_1(x)=(0a_1a_2\cdots),\quad f_2(x)=(2a_1a_2\cdots).$$

因为 $x\in C$ 的充要条件是 x 的三进制展开式中，所有数字都是 0 或 2，所以 $x\in f_1(C)$ 的充要条件是：x 的三进制展开式中，第一位数字是 0，并且其余数字是 0 或 2．同样，$x\in f_2(C)$ 的充要条件是：x 的三进制展开式中，第一位数字是 2，并且其余数字是 0 或 2．因此，我们有 $f_1(C)\subset C$，$f_2(C)\subset C$．从而 $f_1(C)\cup f_2(C)\subset C$．

反之，任取 $x=(a_1a_2\cdots)\in C$，必有 $a_1=0$ 或 2，并且当 $i\geq 2$ 时，$a_i=0$ 或 2．从而当 $a_1=0$ 时，$x\in f_1(C)$；当 $a_1=2$ 时，$x\in f_2(C)$．所以，$C\subset f_1(C)\cup f_2(C)$． □

Cantor 三分集是一个著名的分形集，它还可以从多种途径加以推广．下面的叙述可以看成是 Cantor 型集合的一般化构造．

取 $[0,1]$ 中的单调递减的子集序列：

$$[0,1]=E_0\supset E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_n\supset\cdots.$$

其中每个 E_k 都是由有限个彼此不相交的闭区间 (通常称为基本区间) 的并组成，且 E_k 的每个基本区间至少包含 E_{k+1} 中的两个区间．又当 $k\to\infty$时，E_k 中最大的基本区间长度趋于零．集合

$$C'=\bigcap_{k=0}^{\infty}E_k$$

称为广义的 Cantor 集，它也是一个分形集．但与 Cantor 三分集比较，一般没有自相似性．

§ 1.4 Sierpinski (谢尔宾斯基) 垫片

给定平面 $\mathbb{R}^2$ 上的一个单位正三角形 S_0，在每边上取中点，然后两两连结，构成四个边长为 1/2 的正三角形，去掉中间一个三角形(但保留其三条边)，得到集合 S_1，见图 1.5. 又在 S_1 上的三个三角形的每边取中点，分别连结成边长为 $1/2^2$ 的小正三角形，又分别去掉中间一个 (同样保留每个三角形的三边)，余下一共有 3^2 个三角形. 如此不断继续下去，得到一平面集列:

$$S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset \cdots \quad .$$

可见 S_k 是由 3^k 个边长为 $1/2^k$ 的正三角形组成. $\{S_k\}$ 的极限集 $S = \bigcap_{k=0}^{\infty} S_k$ 称为 Sierpinski (谢尔宾斯基) 垫片.

Sierpinski 垫片也是一个著名的分形集，它和 Cantor 三分集一样，也是自相似的. 它的外壳是一个三角形，但内部留了许多空隙，可以说几乎被掏空了.

现将 S_0 放在坐标系的第一象限中，使其中一个顶点与原点重合，一条边在 x 轴上.

定义 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 的映射:

$$\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$T_i\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{t}_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

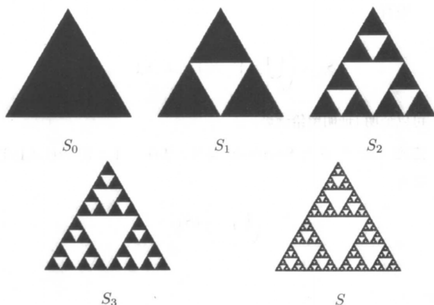


图 1.5 Sierpinski 垫片

其中

$$\mathbf{t}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{t}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{t}_3 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{pmatrix}.$$

令

$$f_i = T_i \circ \Phi, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1.4.1}$$

容易验证

$$S_1 = \left(\bigcup_{i=1}^{3} f_i\right)(S_0),$$

$$S_2 = \left(\bigcup_{i=1}^{3} f_i\right)^2 (S_0).$$

一般有

$$S_k = \left(\bigcup_{i=1}^{3} f_i \right)^k (S_0), \quad k \geqslant 1.$$

可以证明 (证明留给读者)

定理 1.3. 设 S 是 Sierpinski 垫片，$f_i (i = 1, 2, 3)$ 由(1.4.1)定义，则有

$$S = \left(\bigcup_{i=1}^{3} f_i \right) (S).$$

§ 1.5 Koch (科克) 曲线

Koch 曲线的构造如图 1.6 所示．从平面 $\mathbb{R}^2$ 上任一线段 P_0 (设长度为 l) 开始，在 P_0 长度的 $l/3$ 及 $2l/3$ 处撑起一个边长为 $l/3$ 的正三角形，同时去掉底边，得一折线 P_1．P_1 含有 4 条长度为 $l/3$ 的线段．又对 P_1 的四条线段中的每一条重复上述过程，即在每段长度的 1/3 及 2/3 处都撑起一个正三角形，同时去掉底边，得折线 P_2．P_2 含有 4^2 个长度为 $l/3^2$ 的线段．将这个过程不断重复进行下去，可得一折线序列 $\{P_k\}$．可见 P_k 含有 4^k 个长度为 $l/3^k$ 的线段，它的总长度是 $(4/3)^k \cdot l$．因此随着 k 的增加，它将趋于无穷．该序列 $\{P_k\}$ 与前两节中的 $\{C_k\}$ 与 $\{S_k\}$ 有些不同，$\{C_k\}$ 与 $\{S_k\}$ 都是递减的闭集列，但 $\{P_k\}$ 不是单调集列，那么其极限过程是否收敛? 下面就讨论这个问题．首先给出一些定义．

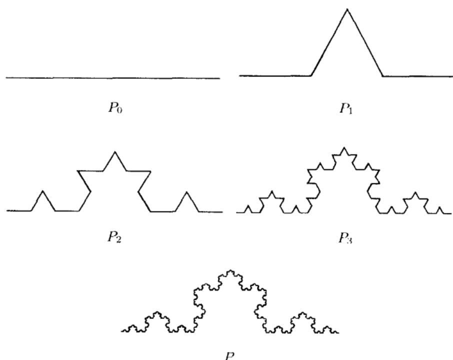


图 1.6 Koch 曲线

定义 1.1. 称映射 $f:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ 是仿射变换，如果它有如下形式：

$$f(x)=\begin{pmatrix} m_1\\ m_2\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix} n_1\\ n_2\end{pmatrix},\quad x\in[a,b],\quad m_i,n_i\in\mathbb{R},\quad i=1,2. \tag{1.5.1}$$

实际上，(1.5.1) 式确定了一个以 x 为参数的直线方程，因此 f 将 $[a,b]$ 变换成平面上的一条线段．

定义 1.2. 称映射 $f:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ 是分段仿射变换，如果存在 $[a,b]$ 的一个分划: $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，使得 f 在每个子区间 $[x_{j-1},x_j]$ 上都是仿射变换.

显然分段仿射变换将 $[a,b]$ 映射成一多边形曲线.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 是平面 $\mathbb{R}^2$ 中的任意两点，用 $d(A,B)$ 表示它们之间的欧几里得距离，即

$$d(A,B)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

又设 g_1,g_2 都是 $[a,b]\to\mathbb{R}^2$ 的连续映射，用 $\|g_1-g_2\|$ 表示它们之间的距离:

$$\|g_1-g_2\|\doteq\max_{x\in[a,b]}d(g_1(x),g_2(x)).\tag{1.5.2}$$

现在继续讨论 Koch 曲线．不妨设线段 P_0 就是区间 $I=[0,1]$．将 I 四等分，作分段仿射变换 f_1，将 I 映射成 P_1 (见图 1.7)．具体构造为: f_1 将区间 $[0,1/4]$ 映射成 P_1 的从点 $(0,0)$ 到点 $(1/3,0)$ 的线段; 将区间 $[1/4,1/2]$ 映射成 P_1 的由点 $(1/3,0)$ 到点 $(1/2,\sqrt{3}/6)$ 的一段; 又将区间 $[1/2,3/4]$ 映射成 P_1 的由点 $(1/2,\sqrt{3}/6)$到点 $(2/3,0)$ 的一段; 最后将 $[3/4,1]$ 映射成 P_1 的由点 $(2/3,0)$ 到点 $(1,0)$ 的一段.

接着将 $[0,1]$ 进行 4^2 等分，作分段仿射变换 f_2，仿照 f_1 的做法依次将它们映射成 P_2 的 4^2 个线段中的相应一段，得 $f_2([0,1])=P_2$.

如此继续下去，到第 k 步，构造分段仿射变换 f_k，将 $[0,1]$ 的 4^k 等分中的每一段依次变换成 P_k 的 4^k 段中相应的一条线段，得 $f_k([0,1])=P_k$.

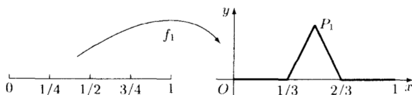


图 1.7 分段仿射变换 f_1

接下去我们要证明，这样构造出来的分段仿射变换序列 $\{f_k\}$ 是收敛的.

首先我们注意到 P_1 上的任何一点与 P_0 上的任何一点之间的距离 (欧氏距离) 不超过 1. 于是，依 (1.5.2) 中的定义可知有

$$\|f_0 - f_1\| \leqslant 1.$$

现在估计当 $k \geqslant 1$ 时 $\|f_k - f_{k+1}\|$ 的大小. 将 $[0,1]$ 等分成 4^k 个小区间，设 J 是其中的任意一个小区间，那么 $f_k(J)$ 将是 P_k 中的一条线段，它的长度是 3^{-k}. 又由 f_{k+1} 的构造方法，可见 $f_{k+1}(J)$ 上任意一点与 $f_k(J)$ 上任意一点之间的距离将不超过 3^{-k}. 于是有

$$\|f_k - f_{k+1}\| \leqslant \frac{1}{3^k}.$$

对于任意自然数 $m > n$，有

$$\|f_n - f_m\| \leqslant \sum_{j=n}^{m-1} \|f_j - f_{j+1}\| \leqslant \sum_{j=n}^{\infty} 3^{-j} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{n-1}}. \qquad (1.5.3)$$

因此 $\{f_n\}$ 构成一个 Cauchy 序列*，由于连续函数空间在度量 $\|\cdot\|$ (由 (1.5.2) 式定义)下是一个完备空间 *，于是存在连续函数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}^2$，有

$$\|f-f_n\|\to 0,\quad (n\to\infty).$$

函数 f 的图象就是 Koch 曲线.

Koch 曲线也具有自相似性．同样也能找到相应的函数系，使其不变集就是 Koch 曲线.

Koch 曲线的生成过程是相当规则的，从一单位线段开始，去掉中间的 1/3，代之以一个等边三角形的两条边，形成图形 "__/__"．然后在四条长度为 1/3 的边上，重复上述步骤，把每条边都用图形 "__/__" 取代，只是该图形的每边长度是 $1/3^2$．将这个过程不断重复下去就可以得到 Koch 曲线．下面我们采用"字符串"的方法来描述上述过程，利用它可在计算机上描绘出 Koch 曲线．首先约定:

A: 表示逆时针方向旋转角度 $\pi/3$;

B: 表示顺时针方向旋转角度 $\pi/3$;

C: 表示从当前点开始沿当前方向画一长度为 L 的线段.

于是字符串"C"表示起点在 $(0,0)$，终点在 $(1,0)$ 的单位线段．而字符串"$CACBBCAC$"表示从 $(0,0)$ 出发向前画一长 $L=1/3$ 的线段，画笔停在 $(1/3,0)$ 处．下一个是字符 A，故应绕逆时针方向转角 $\pi/3$．在操作字符 A 后，当前点的位置是 $(1/3,0)$，而当前方向为 $\pi/3$．在进行操作 C 时，则从 $(1/3,0)$ 出发，沿 $\pi/3$ 方向

*有关 Cauchy 序列、完备空间的概念，可参考本书第三章.

画一线段，长度 $L = 1/3$. 在进行字符 C 操作之后，当前点变为 $(1/2, \sqrt{3}/6)$，而当前方向仍是 $\pi/3$. 接下去是 2 个字符 BB，表示沿顺时针方向转 2 个 $\pi/3$ 角度，因此在进行 BB 操作后，当前点仍是 $(1/2, \sqrt{3}/6)$，但当前方向为 $-\pi/3$. 接下去在字符 C 操作后，当前点变为 $(2/3, 0)$，当前方向为 $-\pi/3$. 再接下去是第 7 个字符 A，操作后当前方向变为 0. 最后再进行 C 操作，画出从 $(2/3, 0)$ 到 $(1, 0)$ 之间的线段. 整个过程结束，画出了 P_1 的图.

为了得到 P_2 的图，只要在字符串 "$CACBBCAC$" 中，将字符 "C" 用字符串 "$CACBBCAC$" 代替，得到字符串 "$CACBB$ CAC A $CACBBCAC$ BB $CACBBCAC$ A $CACBBCAC$ ". 但要注意这时画每段线段的长度 L 应是上一次长度的 $1/3$，即 $1/3^2$.

如此可不断地用上述方法重写字符串，得到 Koch 曲线的近似序列 $\{P_k\}$.

这种字符串替换法，是用计算机绘制分形图形的一种简单有效的方法. 它是美国生物学家 Lindenmayer 于 1968 年为了描述植物生长过程而引入的，被称为 L 系统. 后来图形学家 Prusinkiewicz 和 Smith 等人将 L 系统引入了图形学，使 L 系统成为一类自然景物模拟的有效方法.

§ 1.6 随机分形的例子

前三节讨论的三个分形集有一个共同点，就是都从一个简单的集合 (例如: 一条直线段或三角形) 开始，构造一系列新的集合. 每个新集合都是通过对前一个集合的适当处理 (再分割) 得到的，而这

种处理，完全是确定性的，而不是随机性的. 本节将简单介绍另一类分形集，称为随机分形集.

以随机 Koch 曲线为例. 在 §1.5 Koch 曲线的构造中，每次去掉线段的中间 1/3，代之以等边三角形的两条边，且三角形总是"向上"凸的. 现在我们改变这种做法，使得三角形可以"向上"凸，也可以"向下"凸，并采用随机方法来决定是"向上"还是"向下". 例如可以用掷五分硬币，出现 5 字就取"向上"，否则取"向下". 经过若干步后，可以得到一条很不规则的曲线 (见图 1.8). 它与 Koch 曲线有些类似，又有所不同，最重要的是它已没有自相似性. 但是若注意到在构造中，每一步都是以独立的、同概率分布的方式进行的，则不难理解将曲线局部放大后与整体应有相同的统计分布，人们将这种性质称为统计自相似.

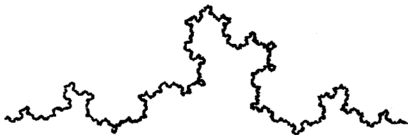


图 1.8 随机 Koch 曲线

从图 1.8 可以发现，随机 Koch 曲线与海岸线非常相似. 事实上利用分形方法，借助计算机对自然景物进行模拟，已经取得了很大的成功，特别是对山、草地、水、云等都能达到相当逼真的程度 (见图 1.9).

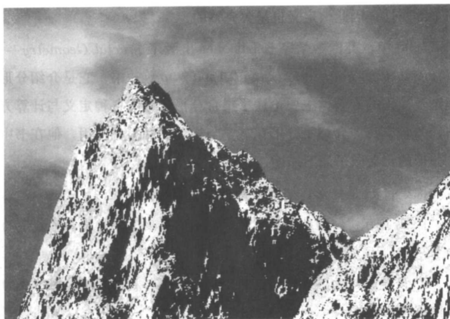


图 1.9 分形山

§ 1.7 什么是分形

至今“分形”这个概念还没有确切的科学定义. 1982 年 Mandelbrot 在最初的论述中，定义分形是这样的一种集合，它的豪斯道夫维数严格大于其拓扑维数 (集合的拓扑维数是通过归纳定义的，因此又称为归纳维数. 集合的拓扑维数总是取整数，空集的拓扑维数为 -1. 可以证明 Cantor 三分集的拓扑维数为 0，Sierpinski 垫片的拓扑维数为 1). 但是这个定义并不合理，因为它将一些分形集 (例如 Peano 曲线) 排除在外.

后来 1986 年 Mandelbrot 修正了上述定义：“组成部分以某种方式与整体相似的形体叫做分形”. 但是自相似性并不能包括分形

的全部属性，因此该定义也是欠完整的.

1990 年，英国数学家 K.Falconer 出版了 *Fractal Geometry — Mathematical Foundations and Applications* 一书，它是介绍分形理论及应用的专著，主要论述了集合分形维数的各种定义与计算方法，并较广泛地介绍了分形在数学与物理上的多种应用. 他在书中给分形的定义做了如下描述.

称集合 F 是分形，如果它具有如下的一些特征：

1° F 具有精细的结构，即在任意小的尺度下，它总具有复杂的细节.

2° F 是如此的不规则，以致于它的整体与局部都不能用传统的几何语言来描述.

3° F 通常有某种自相似性，可能是近似的或是统计的.

4° 一般地说，F 的"分形维数"(以某种方式定义) 大于它的拓扑维数.

5° 在大多数令人感兴趣的情形下，F 以非常简单的方法定义，可能由迭代产生.

事实上，在自然界中没有真正的分形，就象没有真正的圆和直线一样. 通常我们将云彩的边界、地球表面的形状、海岸线等等看作分形. 但是如果用充分小的比例去观察它们，会发现它们的分形特征消失了. 因而仅在一定的比例范围内，它们才表现出了类似分形的特点. 也只有在这种比例下，可以被看成是分形集合. 因此自然界中的分形与数学中的"分形集"是有区别的.

第二章　维　数

维数这个名词对我们并不生疏，在经典的欧氏空间中，点是 0 维，直线是 1 维，平面和立方体分别是 2 维和 3 维．这时候我们是把维数看成自由度，直线上的点可用一个实数表示，平面上的点可用 2 个实数表示．一般的 n 维空间有 n 个自由度，其中的点需用 n 个实数 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 来表示．这种想法是很自然，但这个观点在 100 多年前被提出过质疑．1890 年意大利数学家 G.Peano 第一个构造出一条曲线，称为 Peano 曲线 (见图 2.1)， 用它可以覆盖一个正方形，当时令数学家们大吃一惊．

1891 年德国数学家 D.Hilbert 也给出了一个填满单位正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 的曲线．该方法可以类推到更高维的空间．由这两个例子可见，如果从自由度去考虑，可以把正方形看成是一维的集合，显然这是不合理的．那么究竟如何定义维数呢?

Poincaré (1912) 和 Lebesgue (1911) 都曾对维数的定义提出过重要思想，但总的来说，对维数只停留在直观的描述，缺乏严格的数学定义．使维数研究取得重要进展的，首先应归功于 Hausdorff，它于 1919 年在测度基础上，引入了 Hausdorff 维数概念，它适用于

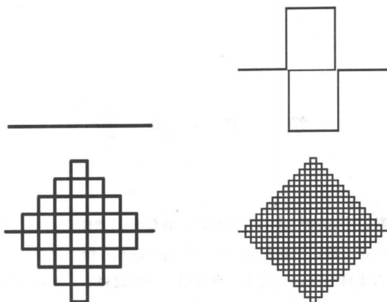


图 2.1 Peano曲线

任何集合，在数学处理上比较方便. Hausdorff 维数的概念是了解分形数学的重要基础.

§ 2.1 Lebesgue (勒贝格) 测度

设 X 是一个给定的集合，X 的子集用大写字母 $A, B, C, \cdots$ 表示，$\varnothing$ 表示空集.

定义 2.1. 设 S 是由 X 的某些子集所构成的非空集合类，若满足下列条件:

1° $X, \varnothing$ 都属于 S;

2° 设 $\{A_i\}$ 是 S 的任一集列，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$;

3° 若 $A_1, A_2 \in S$，则 $A_1 - A_2 \in S$;

则称 S 是一个 σ 代数或 Borel 体.

从定义可知，一个 σ 代数对于“可列并”及“差”的运算是封闭的. 容易证明 σ 代数对于“可列交”也是封闭的.

定义 2.2. 设 S 是由 X 的某子集所组成的 σ 代数，μ 是 S 上的集函数. 如果 μ 满足:

1° $\mu(\varnothing) = 0$;

2° 非负性：对任何 $A \in S$，有

$$0 \leqslant \mu(A) \leqslant +\infty; \tag{2.1.1}$$

3° 可列可加性：对任何一列 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset S$，如果 $A_i \cap A_j = \varnothing\ (i \neq j)$，那么

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j);$$

则称 μ 是 S 上的测度. 当 $\mu(X) < +\infty$ 时，称 μ 为有界测度.

可以证明，如果 μ 是 S 上的测度，那么下面三个性质成立:

(i) 单调性：如果 $A, B \in S, A \subset B$，则 $\mu(A) \leqslant \mu(B)$;

(ii) 次可列可加性：如果 $A_n (n = 1, 2, \cdots)$ 及 A 都属于 S，且 $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，则有

$$\mu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n); \tag{2.1.2}$$

(iii) 若 $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$，且 $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < \infty$，则

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

在直线上，常见的子集有下面三类:

(1) 区间:

开区间 $(\alpha,\beta)=\{x|\alpha<x<\beta\}$;

闭区间 $[\alpha,\beta]=\{x|\alpha\leqslant x\leqslant\beta\}$;

半开半闭区间

$$(\alpha,\beta]=\{x|\alpha<x\leqslant\beta\}\text{ 或 }[\alpha,\beta)=\{x|\alpha\leqslant x<\beta\};$$

(2) 开集: 它是由有限个或可列个开区间的并集组成，例如$(\alpha_1,\beta_1)\cup(\alpha_2,\beta_2)$.

(3) 闭集: 开集的余集.

将直线上的开集和闭集，经过有限次或可列次的“并”与“交”的运算后，所生成的集称为 Borel 集. 它的全体构成一个 σ 代数，称为一维 Borel 体.

在 $\mathbb{R}$ 上的一维 Lebesgue 测度 $\mathcal{L}^1$ 是这样定义的: 首先令

$$\mathcal{L}^1([\alpha,\beta))=\beta-\alpha.$$

又若 $A=\bigcup_i[a_i,b_i)$ 为一个有限或可列个互不相交区间的并集，则令

$$\mathcal{L}^1(A)=\sum_i(b_i-a_i).$$

对于一般集合，则定义为

$$\mathcal{L}^1(A)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)\,\middle|\,A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i)\right\}. \tag{2.1.3}$$

(2.1.3) 式的意思是: 在 A 的所有可能的区间 (可列个) 覆盖中，取尽可能小的区间长度的总和作为它的测度. 这样定义的 $\mathcal{L}^1$ 是一个测度，称为一维 Lebesgue 测度.

用同样方法，可以定义 $\mathbb{R}^n$ 上的 n 维 Lebesgue 测度 $\mathcal{L}^n$. 集 $A=[a_1,b_1)\times[a_2,b_2)\times\cdots\times[a_n,b_n)$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 中的坐标长方体. 令

$$\mathcal{L}^n(A)=(b_1-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_n-a_n).$$

对集合 $A\subset\mathbb{R}^n$，定义

$$\mathcal{L}^n(A)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{L}^n(A_i)\middle|A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i,\ A_i \text{ 是 } \mathbb{R}^n \text{ 中的坐标长方体}\right\}. \tag{2.1.4}$$

一维、二维及三维的 Lebesgue 测度通常分别理解为集合的长度、面积及体积.

例 2.1. Cantor 三分集的一维 Lebesgue 测度为 0.

事实上，由 (1.3.4) 及 (2.1.2)(iii)，有

$$\mathcal{L}^1(C)=\lim_{n\to\infty}\mathcal{L}^1(C_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n}=0.$$

在经典的欧氏几何中，图形的长度、面积分别是用单位线段或单位正方形作为度量单位进行测量所得的值. 从上面的例子可见，如果用单位线段的长度 (一维尺度) 对 Cantor 集进行测量，由于 Cantor 集太稀疏了，测得的值只能是 0. 这说明一维尺度对于 Cantor 集来说是“太粗”了. 同样对于 Koch 曲线，用一维尺度去量，得到的值将是无穷大. 而如果用单位正方形的面积 (二维尺度) 去量得到的值却是 0. 这意味着一维尺度对 Koch 曲线是“太细”了，而二维尺度又“太粗”了. 究其原因，不难发现，这里使用的都是整数维的尺度，它对于一些分形集不适合。我们为什么不用非整数维的尺度去试试呢?

§ 2.2 Hausdorff (豪斯道夫) 测度

用 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示空间 $\mathbb{R}^n$ 中的点. 记

$$|\mathbf{x}| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

表示点 $\mathbf{x}$ 的范数. 若 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$，那么 $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ 表示这两点间的欧氏距离.

设 $F \subset \mathbb{R}^n$ 是非空子集，记

$$|F| = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in F} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

它表示集 F 中任意两点间距离的上确界，称为集 $|F|$ 的直径.

定义 2.3. 集 $F \subset \mathbb{R}^n$，又 $\mathcal{A} = \{A_i\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个有限或可数的子集族. 如果 $\mathcal{A}$ 的每个子集的直径都不超过 δ，即 $|A_i| < \delta, \forall i$，又 $F \subset \bigcup_i A_i$，则称 $\mathcal{A}$ 是 F 的一个 δ 覆盖.

令 $s > 0$ 及 $\delta > 0$，记

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_i |A_i|^s \middle| \{A_i\} \text{ 是 } F \text{ 的 } \delta \text{ 覆盖} \right\}. \tag{2.2.1}$$

(2.2.1) 式的意思是: 在所有 F 的 δ 覆盖中，取其子集直径的 s 次幂总和尽可能小的值. 由定义，若 $\{A_i\}$ 是 F 的某个 δ 覆盖，那么一定有

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \leqslant \sum_i |A_i|^s. \tag{2.2.2}$$

注意到当 δ 减小时，$\mathcal{H}_\delta^s(F)$ 是不减的．因此当 $\delta \to 0$ 时，$\mathcal{H}_\delta^s(F)$ 将趋于一个极限 (不排除 $+\infty$ 的可能性)．记

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^s(F). \tag{2.2.3}$$

可以证明，$\mathcal{H}^s$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个测度，称为 s 维 Hausdorff 测度．

与 Lebesgue 测度一样，Hausdorff 测度推广了长度、面积和体积的概念．同时 $\mathbb{R}^n$ 中任何子集的 n 维 Hausdorff 测度与 n 维 Lebesgue 测度相差一常数倍，精确地说，有

$$\mathcal{H}^n(F) = c_n^{-1}\mathcal{L}^n(F), \quad (F \text{ 是 } \mathbb{R}^n \text{ 中的 Borel 子集}) \tag{2.2.4}$$

其中常数 c_n 是直径为 1 的 n 维球体积，特别地，有 $c_1 = 1, c_2 = \pi/4, c_3 = \pi/6$．

定理 2.1. 设 $F \subset \mathbb{R}^n$，$\lambda > 0$，则有

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F), \tag{2.2.5}$$

这里 $\lambda F \doteq \{\lambda x | x \in F\}$．

证明 设 $\{A_i\}$ 是 F 的一个 δ 覆盖，那么 $\{\lambda A_i\}$ 必是 λF 的一个 $\lambda\delta$ 覆盖，由 (2.2.2) 式可得

$$\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda F) \leqslant \sum_i |\lambda A_i|^s = \lambda^s \sum_i |A_i|^s.$$

由于上式是对任何 F 的 δ 覆盖都成立的，因此有

$$\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda F) \leqslant \lambda^s \mathcal{H}_\delta^s(F).$$

令 $\delta \to 0$，由上述不等式得

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) \leqslant \lambda^s \mathcal{H}^s(F). \tag{2.2.6}$$

现在要证明与 (2.2.6) 相反的不等式成立．事实上，由 (2.2.6) 直接可得

$$\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(\frac{1}{\lambda}(\lambda F)) \leqslant \frac{1}{\lambda^s}\mathcal{H}^s(\lambda F).$$

即

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) \geqslant \lambda^s \mathcal{H}^s(F). \tag{2.2.7}$$

结合 (2.2.6) 与 (2.2.7) 可得 (2.2.5) 式． □

众所周知，长度、面积和体积，当比例放大至 λ 倍时，它们将相应地放大 λ、λ^2 和 λ^3 倍．而定理 2.1 指出，当比例放大 λ 倍时，s 维 Hausdorff 测度则放大至 λ^s 倍．Hausdorff 测度的这个比例性质，是分形理论的基础．

例 2.2. 设 C 是 Cantor 三分集，记 $C_L = C \cap [0, 1/3]$. 显然有 $C_L = \frac{1}{3}C$，于是由定理 2.1 知，$\mathcal{H}^s(C_L) = \mathcal{H}^s(C)/3^s$.

定义 2.4. 设 $F \subset \mathbb{R}^n$，映射 $f : F \to \mathbb{R}^m$. 若存在常数 $c > 0$ 和 $\alpha > 0$，有

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leqslant c|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\alpha, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in F, \tag{2.2.8}$$

则称 f 是满足指数为 α 的 Hölder 条件．特别地，当 $\alpha = 1$ 时，

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leqslant c|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in F, \tag{2.2.9}$$

则称 f 为李卜希兹 (Lipschitz) 映射．

定理 2.2. 设 $F \subset \mathbb{R}^n$，映射 $f: F \to \mathbb{R}^m$，满足 Hölder 条件 (2.2.8). 则对每一个常数 $s \geqslant 0$，有

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leqslant c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F). \tag{2.2.10}$$

证明 设 $\{A_i\}$ 是 F 的任意一个 δ 覆盖，由 (2.2.8) 可知

$$|f(F \cap A_i)| \leqslant c|A_i|^\alpha \leqslant c\delta^\alpha. \tag{2.2.11}$$

于是 $\{f(F \cap A_i)\}$ 将是 $f(F)$ 的一个 $c\delta^\alpha$ 覆盖.

对 (2.2.11) 式两边作 s/α 次幂并求和，得

$$\sum_i |f(F \cap A_i)|^{s/\alpha} \leqslant c^{s/\alpha}\sum_i |A_i|^s.$$

由 (2.2.2) 可知

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}_{c\delta^\alpha}(f(F)) \leqslant \sum_i |f(F \cap A_i)|^{s/\alpha} \leqslant c^{s/\alpha}\sum_i |A_i|^s.$$

注意到上式对 F 任意的 δ 覆盖 $\{A_i\}$ 都是成立的，因此

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}_{c\delta^\alpha}(f(F)) \leqslant c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s_\delta(F).$$

再令 $\delta \to 0$，得

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leqslant c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F).$$

□

推论 2.1. 若 f 是 Lipschitz 映射 (满足条件(2.2.9))，则有

$$\mathcal{H}^s(f(F)) \leqslant c^s\mathcal{H}^s(F). \tag{2.2.12}$$

定义 2.5. 设 $F \subset \mathbb{R}^n$，称映射 $f: F \to \mathbb{R}^m$ 是保距的，如果下面等式成立

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in F. \tag{2.2.13}$$

推论 2.2. 若 f 是保距映射，则

$$\mathcal{H}^s(f(F)) = \mathcal{H}^s(F). \tag{2.2.14}$$

证明　只要对 f 与 f^{-1} (f 的逆映射) 同时利用推论 2.1的结论，就有

$$\mathcal{H}^s(f(F)) \leqslant \mathcal{H}^s(F),$$

和

$$\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(f^{-1}(f(F))) \leqslant \mathcal{H}^s(f(F)),$$

就可得 (2.2.14) 式. □

设 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$，集 $F + \mathbf{a} \doteq \{\mathbf{x} + \mathbf{a} | \mathbf{x} \in F\}$ 称为 F 的平移. 显然，平移映射是保距的. 因此有 $\mathcal{H}^s(F + \mathbf{a}) = \mathcal{H}^s(F)$，就是说 s 维 Hausdorff 测度具有平移不变性.

例如对于 Cantor 三分集 C，记 $C_R = C \cap [2/3, 1]$，可见 $C_R = 2/3 + C_L$，因此一定有 $\mathcal{H}^s(C_R) = \mathcal{H}^s(C_L) = \mathcal{H}^s(C)/3^s$.

§ 2.3 Hausdorff 维数

现在回到 (2.2.1) 式，对任意集合 $F \subset \mathbb{R}^n$，当 $\delta < 1$ 时，其中每个项 $|A_i|^s$ 将随 s 的增加而减少，因此 $\mathcal{H}^s_\delta$ 是关于 s 不增的. 设

$t > s$，有

$$\sum_i |A_i|^t = \sum_i |A_i|^{t-s} \cdot |A_i|^s \leqslant \delta^{t-s} \sum_i |A_i|^s.$$

对该不等式两边关于 $\{A_i\}$ 求下确界，得

$$\mathcal{H}^t_\delta(F) \leqslant \delta^{t-s} \mathcal{H}^s_\delta(F). \tag{2.3.1}$$

假设对于某个 $s > 0$，有 $\mathcal{H}^s_\delta(F) < +\infty$．则当 $t > s$ 时，在 (2.3.1) 式两边，令 $\delta \to 0$，可得 $\mathcal{H}^t(F) = 0$．因此作为 s 的函数，$\mathcal{H}^s(F)$ 只能是如下形式的分段函数：

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} +\infty, & s < s_0, \\ c, & s = s_0, \\ 0, & s > s_0, \end{cases} \tag{2.3.2}$$

其中 s_0 是 $[0, n]$ 中的某个数，c 是某非负数 (不排除 0 与 $+\infty$ 的可能)．s_0 是一个临界点，使 $\mathcal{H}^s(F)$ 从 $+\infty$ 跳跃到 0．这个临界值 s_0 定义为 F 的 Hausdorff 维数，记为 $\dim_H F$．由 (2.3.2) 可见

$$\dim_H F = \inf\{s|\mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s|\mathcal{H}^s(F) = +\infty\}, \tag{2.3.3}$$

以及

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} +\infty, & 若\ s < \dim_H F; \\ 0, & 若\ s > \dim_H F. \end{cases} \tag{2.3.4}$$

对于集合 F，若存在 $s \geqslant 0$，有 $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$，则称 F 是 s 集．

例 2.3. 设 $F = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中有限点集，易见 $\mathcal{H}^0(F) = k$．因此 $\dim_H F = 0$．又若集合 G 为 $\mathbb{R}^3$ 中单位圆盘，此时有 $0 < \mathcal{H}^2(G) = (\pi/4)^{-1}\mathcal{L}^2(G) = 4 < \infty$，因此 $\dim_H G = 2$．

下面将给出 Hausdorff 维数的一些基本性质.

定理 2.3. 设 A, B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 Borel 集,

(1) 如果 $A \subset B$, 则 $\dim_H A \leqslant \dim_H B$;

(2) $\dim_H(A \cup B) = \max\{\dim_H A, \dim_H B\}$.

证明 (1) 若 $A \subset B$, 对任意 $s > \dim_H B$, 利用测度的单调性 (见 (2.1.2)(i)) 及 (2.3.4) 有 $\mathcal{H}^s(A) \leqslant \mathcal{H}^s(B) = 0$. 由 (2.3.3) 可知, 必有 $\dim_H A \leqslant s$. 由 s 的任意性, 可得 $\dim_H A \leqslant \dim_H B$.

(2) 由 (1) 的结论可知, $\dim_H(A \cup B) \geqslant \max\{\dim_H A, \dim_H B\}$. 现在证明相反的不等式成立, 证明方法与 (1) 相似. 对任何 $s > \max\{\dim_H A, \dim_H B\}$, 此时必有 $\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(B) = 0$. 由测度的次可加性 (见 (2.1.2)(ii)), 得 $\mathcal{H}^s(A \cup B) \leqslant \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$, 于是 $\mathcal{H}^s(A \cup B) = 0$. 因此必有 $\dim_H(A \cup B) \leqslant s$. 同样由 s 的任意性, 可得 $\dim_H(A \cup B) \leqslant \max\{\dim_H A, \dim_H B\}$. □

定理 2.3 可以推广, 证明方法完全类似. 若 $A_1, A_2, \ldots, A_n, \cdots$ 是一个 Borel 集列, 则有

$$\dim_H \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sup_i \{\dim_H A_i\}. \tag{2.3.5}$$

特别地, 若 F 是可数集, 即它是由可数个点组成的集, 则必有 $\dim_H F = 0$.

定理 2.4. 设 $F \subset \mathbb{R}^n$, 映射 $f: F \to \mathbb{R}^m$,

(1) 若 F 为 Lipschitz 变换, 则

$$\dim_H(f(F)) \leqslant \dim_H F. \tag{2.3.6}$$

(2) 若 f 是双 Lipschitz 变换，即存在常数 $0 < c_1 \leqslant c_2 < \infty$，有

$$c_1|x-y| \leqslant |f(x)-f(y)| \leqslant c_2|x-y|, \quad \forall x, y \in F,$$

则有

$$\dim_H(f(F)) = \dim_H F. \tag{2.3.7}$$

证明 (1) 设 $s > \dim_H F$，由 (2.2.12) 得

$$\mathcal{H}^s(f(F)) \leqslant c^s \mathcal{H}^s(F) = 0.$$

这意味着 $\dim_H f(F) \leqslant s$. 这样就证明了 (2.3.6) 式.

(2) 若 f 为双 Lipschitz 变换，只要对 f^{-1} (亦满足 Lipschitz 条件) 利用不等式 (2.3.6)，即可得相反不等式

$$\dim_H F = \dim_H(f^{-1}(f(F))) \leqslant \dim_H f(F).$$

□

定理 2.4 告诉我们，若两集合之间存在双 Lipschitz 变换关系，则它们有相同的 *Hausdorff* 维数.

例 2.4. 设 C 是 Cantor 三分集，证明 $\dim_H C = \log 2/\log 3 \approx 0.6309$.

证明 在本章 § 2 中我们已证明了等式

$$\mathcal{H}^s(C) = \mathcal{H}^s(C_L) + \mathcal{H}^s(C_R) = \frac{2}{3^s}\mathcal{H}^s(C).$$

现在令 $s=\dim_H C$ (并假定 $0<\mathcal{H}^s(C)<\infty$)，将上面等式两边除以 $\mathcal{H}^s(C)$，可得关于 s 的方程

$$1=2\cdot\frac{1}{3^s},$$

解得 $s=\log 2/\log 3$. □

在上例的证明过程中，我们把 $0<\mathcal{H}^s(C)<\infty$ 作为假设 (虽然可能是合理的)，因此论证是不严格的．要严格证明也是可以的，但要花一番功夫．对于一般的分形集来说，要算出它的 Hausdorff 维数，通常不是一件容易的事．

用类似的方法，可以计算 Koch 曲线及 Sierpinski 垫片的维数，它们分别是 $\log 4/\log 3$ 及 $\log 3/\log 2$.

§ 2.4 Box 维数 (盒维数)

盒维数是应用广泛的维数之一，主要是由于这种维数的计算及经验估计相对容易些．它的研究可追溯到 20 世纪 30 年代，并有多种称呼：闵可夫斯基 (Minkowski) 维数、Kolmogorov 熵、熵维数、容度维数、度量维数和信息维数等．

盒维数的定义比较直观，它不是从测度出发的．先定义 $\mathbb{R}^n$ 中的 δ 坐标网立方体，它是下面形式的集合：

$$[m_1\delta,(m_1+1)\delta]\times\cdots\times[m_n\delta,(m_n+1)\delta],$$

其中 $m_1,\cdots,m_n$ 都是整数．显然直线 $\mathbb{R}$ 上的网立方体就是边长为 δ 的区间，而 $\mathbb{R}^2$ 中的是边长为 δ 的正方形．

设 $F \subset \mathbb{R}^n$ 是任意非空的有界子集，用 $N_\delta(F)$ 表示集合 F 与坐标网立方体相交的个数．就是说，有 $N_\delta(F)$ 个网立方体覆盖了整个集合 F．集合 F 的下盒维数及上盒维数的定义分别是:

$$\underline{\dim}_B F = \varliminf_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{\log 1/\delta}, \tag{2.4.1}$$

$$\overline{\dim}_B F = \varlimsup_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{\log 1/\delta}. \tag{2.4.2}$$

显然，总有 $\underline{\dim}_B F \leqslant \overline{\dim}_B F$．如果 $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F$，则称这个共同值为 F 的 Box 维数 (盒维数)，记为 $\dim_B F$，此时有

$$\dim_B F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{\log 1/\delta}. \tag{2.4.3}$$

注意在 (2.4.1) ~ (2.4.3) 中，$\delta \to 0$ 的极限过程，可以取一递减的正数序列 $\{\delta_k\}$，只要满足条件 $\delta_{k+1} \geqslant c\delta_k$ 即可，其中 $0 < c < 1$，例如可取 $\delta_k = c^k$．

现在对平面 $\mathbb{R}^2$ 上集合的盒维数作一简单的几何解释：为计算平面集合 F 的盒维数，可以先在平面上画出 δ 坐标正方形网格，计算 F 与网格正方形相交的个数 $N_\delta(F)$ (δ 正方形可以看作盒子，盒维数因此而得名)．取不同的 δ (例如 $\delta_n = 1/2^n, n = 1, 2, \cdots$)，求得各 $N_\delta(F)$ 的值．将所得数据在重对数坐标系 $(\log \delta^{-1})$ — $\log N_\delta(F)$ 中用点标出 (见图 2.2 所示)，图中直线的斜率可以视为集 F 的盒维数的近似值．

有人曾用该方法来估计英国一段海岸线的维数：分别用边长为 1/24 及 1/32 的正方形网格去覆盖海岸线，数出与海岸线相交的盒

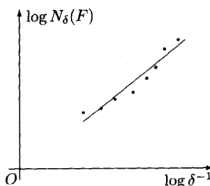


图 2.2 集 F 的盒维数的估计

子数分别为 194 个及 283 个，于是海岸线的盒维数大约是

$$\frac{\log 283 - \log 194}{\log 32 - \log 24} \approx 1.31.$$

Mandelbrot 曾得出英国西海岸的维数是 1.25，德国国境线维数是 1.15，澳大利亚海岸线是 1.13，而南非海岸线是 1.02.

实际上，在上、下盒维数定义之中，覆盖集可以不一定取 δ 坐标立方体网格. 可以证明，在 (2.4.1) 和 (2.4.2) 式中的 $N_\delta(F)$ 可以换成下列四类数中的任何一个，其结果都是一样的，都将给出相同的盒维数.

1° 覆盖 F 的半径为 δ 的最少闭球数;

2° 覆盖 F 的边长为 δ 的最少的立方体数;

3° 覆盖 F 的直径最大为 δ 的集合的最少个数;

4° 球心在 F 上，半径为 δ 的相互不交的球的最多个数.

下面定理给出了盒维数与 Hausdorff 维数的一个简单关系.

定理 2.5. 设 $F \subset \mathbb{R}^n$，则有

$$\dim_H F \leqslant \underline{\dim}_B F \leqslant \overline{\dim}_B F. \tag{2.4.4}$$

证明 假设 F 能被 $N_\delta(F)$ 个直径为 δ 的集合覆盖，由 (2.2.1) 式定义有

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) \leqslant N_\delta(F) \cdot \delta^s.$$

假定 $s < \dim_H F$，则 $\lim\limits_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F) = \mathcal{H}^s(F) = +\infty$. 于是当 δ 充分小时，有

$$N_\delta(F) \cdot \delta^s > 1.$$

对上式两边取对数，可得

$$s < \frac{\log N_\delta(F)}{\log \delta^{-1}},$$

因此，

$$s \leqslant \varliminf_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{\log \delta^{-1}},$$

由 s 的任意性，可得

$$\dim_H F \leqslant \varliminf_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{\log \delta^{-1}} = \underline{\dim}_B F.$$

□

例 2.5. 设 C 是 Cantor 三分集，则有 $\dim_B C = \log 2/\log 3$.

证明 Cantor 三分集 C 可由 C_k 的 2^k 个长度为 3^{-k} 的基本区间覆盖，因此若取 $\delta_k = 1/3^k$，那么 $N_{\delta_k}(C) = 2^k$，于是

$$\dim_B C = \lim_{k\to\infty} \frac{\log N_{\delta_k}(C)}{\log \delta_k^{-1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^k} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

例 2.6. 设 $F=\{0,1,1/4,1/9,1/16,\cdots\}$，试求 $\dim_B F$.

解 令 k 是自然数，则

$$\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}.$$

取

$$\frac{2k+3}{(k+1)^2(k+2)^2}\leqslant\delta<\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2},$$

我们注意到

(1) 需要不少于 k 个长度为 δ 的区间，才能覆盖住集合 F，因此

$$N_\delta(F)>k;$$

(2) 因为

$$4(k+1)\delta\geqslant4(k+1)\cdot\frac{2k+3}{(k+1)^2(k+2)^2}>\frac{1}{k^2},$$

因此集合 $F\cap[0,1/k^2]$ 一定可用 $4(k+1)$ 个长度为 δ 的区间覆盖，这样

$$N_\delta(F)<4(k+1)+(k-1)=5k+3.$$

由 (1)、(2) 可得

$$\frac{\log k}{\log\dfrac{(k+1)^2(k+2)^2}{2k+3}}<\frac{\log N_\delta(F)}{\log\delta^{-1}}<\frac{\log(5k+3)}{\log\dfrac{k^2(k+1)^2}{2k+1}}.$$

令 $\delta \to 0$，此时必有 $k \to \infty$，得

$$\dim_B F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{\log \delta^{-1}} = \frac{1}{3}.$$

从例 2.5 可知，Cantor 三分集的 Hausdorff 维数与盒维数是相同的，都是 $\log 2/\log 3$．还有一些“相当规则”的分形集也是如此，但并不总是这样，例 2.6 就是一例．下面再举一个简单的例子：

设 F 是 $[0,1]$ 中全体有理数组成的集合．由 (2.3.5) 知，$\dim_H F = 0$，但易见 $\dim_B F = 1$．

这个例子说明可数集可以有非零的盒维数．对于可数点集(一个“小”的集合)却有盒维数 1，这破坏了维数的概念．由于此原因，因而限制了盒维数的应用．对于盒维数，等式

$$\dim_B \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) = \sup_i \{\dim_B F_i\}$$

一般不真，譬如对于例 2.6．

当然，盒维数也具有 Hausdorff 维数类似的一些性质，例如有限点集的盒维数为 0，直线段的盒维数为 1，单位圆盘的盒维数为 2．还有

1° 单调性，若 $A \subset B$，则 $\dim_B A \leqslant \dim_B B$；

2° $\dim_B (A \cup B) = \max\{\dim_B A, \dim_B B\}$；

3° 设 $F \subset \mathbb{R}^n$，映射 $f: F \to \mathbb{R}^m$ 是双 Lipschitz 变换，则

$$\dim_B (f(F)) = \dim_B F.$$

除了上面讨论过的 Hausdorff 维数及盒维数外，还有多种其他维数的定义，例如常见的还有 Packing (填充) 维数等.

集合的维数计算是一个基本而重要的问题，直接利用定义计算是非常有局限性的，只能对一些比较简单的分形集奏效. 严格的维数计算往往需要较多的数学知识和技巧，例如质量分布原理、位势理论等. 读者如有兴趣，可进一步参考有关文献.

§ 2.5 函数图象的维数

由连续函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，可定义平面 $\mathbb{R}^2$ 上的子集

$$\mathrm{Graph}(f)=\{(x,f(x))\mid a\leqslant x\leqslant b\},$$

它称为函数 f 的图象. Graph(f) 是 $\mathbb{R}^2$上的一条连续曲线，它是一个闭集. 不少函数图象上下波动比较剧烈，呈现出分形的特征，其中最著名的例子是 Weierstrass 函数

$$W(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{(s-2)n}\sin(\lambda^n x),$$

其中 $1<s<2$ 且 $\lambda>1$，它是处处连续但处处不可导的，其图象 (图 2.3) 是一个分形集.

要计算出函数图象的维数，特别是它的 Hausdorff 维数，常常是很困难的，Weierstrass 函数的 Hausdorff 维数至今没有得到解决. 下面我们简单讨论一下函数图象的盒维数问题，首先若 $f\in C[a,b]$，则显然有 $\dim_B \mathrm{Graph}(f)\geqslant 1$. 现在引入记号

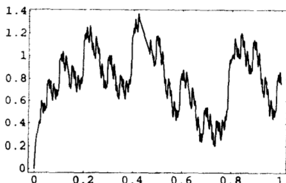


图 2.3 Weierstrass函数 ($s = 1.5, \lambda = 2$)

$R_f[x_1, x_2]$ 表示 f 在区间 $[x_1, x_2]$ 上的振幅，即

$$R_f[x_1, x_2] = \sup_{x', x'' \in [x_1, x_2]} |f(x') - f(x'')| . \tag{2.5.1}$$

引理 2.1. 设 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ 连续，又设 $0 < \delta < 1$，m 是大于或等于 δ^{-1} 的最小整数，用 N_δ 表示 δ 坐标网正方形与 Graph(f) 相交的正方形个数，则有

$$\delta^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} R_f[i\delta, (i+1)\delta] \leqslant N_\delta < 2m + \delta^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} R_f[i\delta, (i+1)\delta]. \tag{2.5.2}$$

证明 在区间 $[i\delta, (i+1)\delta]$ 上的柱体内 (见图 2.4)，边长为 δ 的正方形与 Graph(f) 相交的个数至少有

$$R_f[i\delta, (i+1)\delta]/\delta,$$

但不超过

$$2 + R_f[i\delta, (i+1)\delta]/\delta,$$

对 i 求和，可得 (2.5.2) 式. □

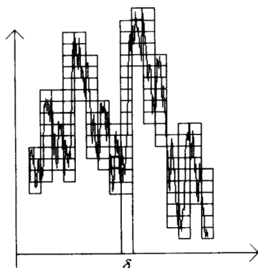


图 2.4

定理 2.6. 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 连续，满足指数为 $(2-s)$ 的 Hölder 条件 (见 (2.2.8) 式)，即存在常数 $c>0$，有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant c|x'-x''|^{2-s},\quad 1\leqslant s\leqslant 2. \tag{2.5.3}$$

则有

$$\dim_B \mathrm{Graph}(f)\leqslant s. \tag{2.5.4}$$

证明 任取 $0<\delta<1$，由 (2.5.3) 式立即得知 $R_f[i\delta,(i+1)\delta]\leqslant c\cdot\delta^{2-s}$. 令 m 是大于或等于 δ^{-1} 的最小整数，则 $m-1<\delta^{-1}$. 由 (2.5.2) 式得

$$\begin{aligned}N_\delta &< 2m+c\delta^{-1}\cdot m\cdot\delta^{2-s}\\ &= m(2+c\delta^{1-s})<(1+\delta^{-1})(2+c\delta^{1-s})<c_1\delta^{-s},\end{aligned}$$

其中 c_1 是与 δ 无关的正常数．因此有

$$\dim_B \mathrm{Graph}(f) = \lim_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta}{\log \delta^{-1}} \leqslant \lim_{\delta\to 0} \frac{\log c_1\delta^{-s}}{\log \delta^{-1}} = s.$$

□

推论 2.3. 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 连续，满足 Lipschitz 条件 (在 (2.5.3) 式中令 $s=1$)，则有

$$\dim_B \mathrm{Graph}(f) = 1. \tag{2.5.5}$$

证明 仿上面定理的证明，存在与 δ 无关的正常数 c_1, c_2，使不等式

$$c_2\delta^{-1} < \delta^{-1} - 1 \leqslant m - 1 < N_\delta < c_1\delta^{-1}$$

成立．由此不等式直接可得 (2.5.5) 式． □

第三章　迭代函数系

迭代函数系 (iterated function systems，简记为 IFS) 是构造分形集的一种有效方法. 有关于它的论述是由 Hutchinson 在 1981 年的著名论文 *Fractal and Self-Similarity* 中给出的，至今已有十分丰富的内容. 特别是 Barnsley 等人的工作，将其与计算机应用相结合，发现了分形图象压缩技术，取得了巨大成功. 因而 Barnsley 本人被认为是当前数学理论与方法直接创造效益的最活跃的最有影响的数学家之一.

本章主要阐述 IFS 的基本理论.

§ 3.1　度量空间

设 X 是非空集合，假定对 X 中任意一对元素 (x, y)，都给定一个实数 $d(x, y)$ 与之对应，且满足下列三个条件:

$$
\begin{aligned}
&1^\circ\ d(x,y) \geqslant 0,\ \forall x, y \in X;\ 且\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y\ (恒等公理),\\
&2^\circ\ d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)\quad (三角形公理),\\
&3^\circ\ d(x,y) = d(y,x)\quad (对称公理),
\end{aligned}
\tag{3.1.1}
$$

则称 d 为 X 上的距离， X 按 d 成为度量空间，记为 $(X;d)$. 在分形理论中，通常只在 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中讨论问题，因此往后非空集 X 一般都指 $\mathbb{R}^n$ 的子集.

例如在平面 $\mathbb{R}^2$ 上，对于任意两点 $\mathbf{x}=(x_1,x_2),\mathbf{y}=(y_1,y_2)$，可以按下面几种方式定义距离:

$$\begin{aligned} d_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= |x_1-y_1|+|x_2-y_2|, \\ d_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= (|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2)^{1/2} \quad (\text{称为欧氏距离}), \\ d_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}, \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

构成度量空间 $(\mathbb{R}^2;d_i)$ $(i=1,2,\infty)$.

设序列 $\{x_n\}\subset X$，又 $x_0\in X$，若 $d(x_n,x_0)\to 0(n\to\infty)$，则称 $\{x_n\}$ 依距离收敛于 x_0. 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \text{或} \quad x_n \xrightarrow{d} x_0 \quad (n\to\infty).$$

点集 $\{x\in X|d(x,x_0)<\varepsilon\}$ 称为以 x_0 为中心，ε 为半径的开球，亦称为 x_0 的一个 ε 邻域，记为 $O(x_0;\varepsilon)$.

点集 $A\subset X$ 称为有界集，如果它包含在某个球 $O(x_0;r)$ 中. 显然，若 A 是有界集，则任取 $x^*\in X$，都存在 $r^*>0$，使得 $A\subset O(x^*,r^*)$.

设 A 是一个给定集合，$x\in A$. 如果存在 $\varepsilon>0$，使得 $O(x;\varepsilon)\subset A$，则 x 称为 A 的一个内点. 如果 A 中的任意点 x 都是 A 的内点，则点集 A 称为开集. 空集 $\varnothing$ 及全空间 X 都是开集，任意个开集的并集是开集，有限个开集的交集是开集.

设集合 $A \subset X, x_0 \in X$，如果对任意 $\varepsilon > 0$，开球 $O(x_0;\varepsilon)$ 都含有 A 中无限多个点，则称 x_0 是 A 的一个极限点．如果 $A \subset X$ 的所有极限点都属于 A 自己，则称集合 A 是闭集．空集 $\varnothing$ 及全空间 X 都是闭集，任意个闭集的交集是闭集，有限个闭集的并集是闭集．此外，不难证明，A 是闭集的充要条件是 A 的余集是开集．

由集合 A 的所有极限点组成的集合称为 A 的极限点集，记作 A'．我们称 A 与 A' 的并集为集合 A 的闭包，记作 $\bar{A}$．注意到 $\bar{A}$ 必定是闭集．

类似地，我们可给出序列的极限点和极限点集的定义．设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中的一个序列，$x_0 \in X$，如果对 x_0 的任意一个 ε 邻域 $O(x_0;\varepsilon)$，有无穷多个 n，使得 $x_n \in O(x_0;\varepsilon)$，则称 x_0 是该序列的一个极限点．由 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的所有极限点组成的集合称为 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限点集，序列的极限点集也是闭集．

称点集 $A \subset X$ 是列紧集，当且仅当 A 中的任一点列，都存在它的一个子序列收敛于 A 中的一点．

设 $A \subset X$，$\mathcal{J} = \{G_\alpha\}$ 是 X 中的一个开集族，如果 $A \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$，则称开集族 $\mathcal{J}$ 覆盖了 A，或者称 $\mathcal{J}$ 是 A 的一个开覆盖．意思是：对任何 $a \in A$，至少存在一个开集 $G_\alpha \in \mathcal{J}$ 使得 $a \in G_\alpha$．若能从集合 A 的任一开覆盖 $\mathcal{J}$ 中选出有限个开集，使它们仍能组成 A 的一个开覆盖，则称集 A 是紧集．不难证明：(1) 紧集的闭子集也是紧集，(2) 设 $A \subset X$ 是一个紧集，Y 是某度量空间，设 $f : A \to Y$ 是一个连续函数，则 $f(A)$ 也是 Y 中的一个紧集．

对于一般的度量空间 X，

$$\text{集合 } A \subset X \text{ 是紧集} \Leftrightarrow A \text{ 是列紧集} \Rightarrow A \text{ 是有界闭集}.$$

但对于$\mathbb{R}^n$的子集，紧集、列紧集与有界闭集这三个概念是等价的.

点列$\{x_n\} \subset X$被称为一个柯西 (Cauchy) 序列，如果对于$\forall \varepsilon > 0$，存在自然数$N(\varepsilon)$，使得当$n, m > N(\varepsilon)$时，有$d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

度量空间$(X; d)$称为是完备度量空间，如果X中的每一个柯西序列都收敛于X中的某个点. n维欧氏空间$\mathbb{R}^n$是完备的.

设$(X; d)$是度量空间，映射$f: X \to X$，若存在$0 \leqslant \alpha < 1$，有

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y), \quad \forall x, y \in X, \tag{3.1.3}$$

则称f是X上的一个压缩映射，α称为压缩因子.

若f是X上的压缩映射，则它一定是连续的. 即：若$x_n \xrightarrow{d} x_0$，则一定有$f(x_n) \xrightarrow{d} f(x_0)$.

若存在$x^* \in X$，有$f(x^*) = x^*$，则称x^*是f的一个不动点.

定理 3.1 (Banach 不动点定理). *在完备度量空间中，压缩映射必有惟一的不动点.*

不动点可通过下述的迭代过程来求：任取$x_0 \in X$作为初始点，作迭代序列

$$x_1 = f(x_0),$$

$$x_2 = f(x_1) = f^2(x_0),$$

$$\vdots$$

$$x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0),$$

$$\vdots$$

设 $x^* \in X$ 是它的不动点，则

$$x_n \xrightarrow{d} x^*,$$

且有

$$d(x^*, x_n) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0),$$

其中 α 是 f 的压缩因子.

§ 3.2 空间 $(\mathcal{H}(X), h)$

设 $(X; d)$ 是完备度量空间. 先引入若干记号:

$\mathcal{H}(X)$: 表示由 X 的所有非空紧子集组成的集合;

$d(x, B) \doteq \min\{d(x, y) | y \in B\}, \quad x \in X, B \in \mathcal{H}(X);$

$d(A, B) \doteq \max\{d(x, B) | x \in A\}, \quad A, B \in \mathcal{H}(X);$

$a \vee b \doteq \max\{a, b\}, \quad a, b$ 为实数.

显然，对于 X 的任一非空紧子集 B，若 $x \in B$，则 $d(x, B) = 0$. 反之，若 $x \overline{\in} B$，那么一定有 $d(x, B) > 0$. 在一般情况下 $d(A, B) \neq d(B, A)$. 例如在空间 $(\mathbb{R}^2; d_2)$ 中，取 $A = \{(-1, 0)\}$ 为单点集，取 $B = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1/4\}$ 为一个开圆盘，这时有 $d_2(A, B) = 1/2$，而 $d_2(B, A) = 3/2$，它们并不相等.

现设 $S \in \mathcal{H}(X)$，$a > 0$，记

$$N_a(S) = \{y \in X | d(y, S) \leqslant a\}, \tag{3.2.1}$$

则 $N_a(S)$ 是 X 中的闭集，称为 S 的闭 a 邻域 (图 3.1).

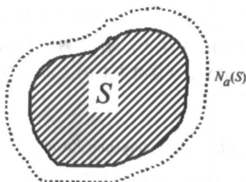


图 3.1　集 S 的闭 α 邻域

引理 3.1. 设 $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$，则

$$d(A \cup B, C) = d(A, C) \vee d(B, C). \tag{3.2.2}$$

证明

$$\begin{aligned} d(A \cup B, C) &= \max\{d(x, C) | x \in A \cup B\} \\ &= \max\{d(x, C) | x \in A\} \vee \max\{d(x, C) | x \in B\} \\ &= d(A, C) \vee d(B, C). \end{aligned}$$

□

定义 3.1. 设 $A, B \in \mathcal{H}(X)$，它们间的 Hausdorff 距离定义为:

$$h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A). \tag{3.2.3}$$

定理 3.2. h 是 $\mathcal{H}(X)$ 上的一个度量.

证明　我们只要验证 h 满足 (3.1.1) 中的三个公理. 首先显然有 $h(A, A) = 0$. 又若 $A \neq B$，不妨假设 $\exists a \in A$，但 $a \overline{\in} B$，这样

有 $h(A,B) \geqslant d(A,B) \geqslant d(a,B) > 0$，因此 $h(A,B)=0$ 等价于 $A=B$．又显然有 $h(A,B)=h(B,A)$．为此，剩下只要证明三角形不等式．设 $A,B,C \in \mathcal{H}(X)$，先证明 $d(A,B) \leqslant d(A,C)+d(C,B)$．事实上，

$$\begin{aligned}
d(A,B) &= \max_{a\in A}\{d(a,B)\} = \max_{a\in A}\{\min_{b\in B} d(a,b)\} \\
&\leqslant \max_{a\in A}\{\min_{b\in B}[d(a,c)+d(c,b)]\}, \quad c\in C \\
&= \max_{a\in A}\{d(a,c)+\min_{b\in B} d(c,b)\} = \max_{a\in A}\{d(a,c)+d(c,B)\} \\
&\leqslant \max_{a\in A} d(a,c)+d(C,B).
\end{aligned}$$

在上述论证过程中，$c\in C$ 是任意选择的；特别地，可选择 c 使得 $d(a,c)=d(a,C)$，于是

$$\begin{aligned}
d(A,B) &\leqslant \max_{a\in A} d(a,C)+d(C,B) \\
&= d(A,C)+d(C,B) \leqslant h(A,C)+h(C,B).
\end{aligned}$$

同理可证

$$d(B,A) \leqslant d(B,C)+d(C,A) \leqslant h(A,C)+h(C,B).$$

这样有

$$h(A,B) = d(A,B) \vee d(B,A) \leqslant h(A,C)+h(C,B).$$

□

定理 3.3. 设 $A,B \in \mathcal{H}(X), \varepsilon > 0$，则 $h(A,B) \leqslant \varepsilon$ 的充要条件是：$A \subset N_\varepsilon(B)$ 且 $B \subset N_\varepsilon(A)$.

证明 首先证明 $d(A,B) \leqslant \varepsilon$ 等价于 $A \subset N_\varepsilon(B)$. 若 $d(A,B) \leqslant \varepsilon$，则对于 $\forall a \in A$，有 $d(a,B) \leqslant \varepsilon$，从而 $a \in N_\varepsilon(B)$，因此 $A \subset N_\varepsilon(B)$. 反之，假定 $A \subset N_\varepsilon(B)$，那么对于 $\forall a \in A, \exists b \in B$，使得 $d(a,b) \leqslant \varepsilon$，从而 $d(a,B) \leqslant \varepsilon$，于是 $d(A,B) \leqslant \varepsilon$. 同样可证明 $d(B,A) \leqslant \varepsilon$ 等价于 $B \subset N_\varepsilon(A)$. 综合起来，可得定理的证明. □

由定理 3.3 可以得到:

$$h(A,B) = \inf\{\delta \in \mathbb{R} | A \subset N_\delta(B) \text{ 且 } B \subset N_\delta(A)\}. \tag{3.2.4}$$

推论 3.1. 若 $h(A,B) \leqslant \varepsilon$，则对 $\forall x \in A, \exists y \in B$，有 $d(x,y) \leqslant \varepsilon$. 同样对 $\forall y \in B, \exists x \in A$，有 $d(x,y) \leqslant \varepsilon$.

引理 3.2. 设 $A, B, C, D \in \mathcal{H}(X)$，则有

$$h(A \cup B, C \cup D) \leqslant h(A,C) \vee h(B,D). \tag{3.2.5}$$

证明 由引理 3.1知

$$\begin{aligned} d(A \cup B, C \cup D) &= d(A, C \cup D) \vee d(B, C \cup D) \\ &= \max_{a \in A} d(a, C \cup D) \vee \max_{b \in B} d(b, C \cup D) \\ &\leqslant \max_{a \in A} d(a, C) \vee \max_{b \in B} d(b, D) \\ &= d(A,C) \vee d(B,D). \end{aligned}$$

同理有 $d(C \cup D, A \cup B) \leqslant d(C,A) \vee d(D,B)$.

由此可得引理的证明. □

引理 3.2 很容易推广到下面一般情况.

定理 3.4. 设 $A_i, B_i \in \mathcal{H}(X), i = 1, 2, \cdots, N$, 则有

$$h\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i, \bigcup_{i=1}^{N} B_i\right) \leqslant h(A_1, B_1) \vee h(A_2, B_2) \vee \cdots \vee h(A_N, B_N). \tag{3.2.6}$$

在 $\mathcal{H}(X)$ 中引入 Hausdorff 度量 h, 使之成为一个度量空间, 记为 $(\mathcal{H}(X), h)$, 通常称它为分形空间.

定义 3.2. 称集列 $\{A_n\} \subset \mathcal{H}(X)$ 是空间 $(\mathcal{H}(X), h)$ 中的一个柯西序列, 如果对任给 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 $N(\varepsilon)$, 当 $n, m > N(\varepsilon)$ 时, 有 $h(A_m, A_n) < \varepsilon$.

我们已经知道 $(\mathcal{H}(X), h)$ 是一个度量空间, 事实上它还是一个完备的度量空间.

定理 3.5. $(\mathcal{H}(X), h)$ 是一个完备的度量空间, 即如果 $\{A_n\}$ 是 $(\mathcal{H}(X), h)$ 中的一个柯西序列, 则存在 $A \in \mathcal{H}(X)$, 有 $h(A, A_n) \to 0 \quad (n \to \infty)$.

证明 令 $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i}$. 我们将证明集合 A 满足定理的要求.

由柯西序列的定义, 可知 $\forall k \in \mathbb{N}$, 存在自然数 α_k, 使得当 $m, n \geqslant \alpha_k$ 时, 有

$$h(A_m, A_n) \leqslant \frac{1}{k}. \tag{3.2.7}$$

任取 $x_0 \in X$, 因为 $A_1, A_2, \ldots, A_{\alpha_1}$ 是紧集, 所以对于 $n =$

$1,2,\ldots,\alpha_1$，存在 $r_n>0$，使得

$$A_n\subset O(x_0;r_n).$$

又由 (3.2.7) 式，当 $n>\alpha_1$ 时，有

$$A_n\subset O(x_0;r_{\alpha_1}+1).$$

于是若令 $r=\max\{r_1,r_2,\ldots,r_{\alpha_1-1},r_{\alpha_1}+1\}$，则对于所有 $n\in\mathbb{N}$，有 $A_n\subset O(x_0;r)$，从而

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subset O(x_0;r).$$

这样可知对任意 n，$\bigcup_{i=n}^{\infty}A_i$ 是有界集，因此 $\overline{\bigcup_{i=n}^{\infty}A_i}$ 是紧集，所以 A 是可列个紧集的交集，从而 A 是闭集. 又由 $A\subset\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n}$，可知 A 是有界集，所以 A 是紧集，即 $A\in\mathcal{H}(X)$.

下面证明 $\lim\limits_{n\to\infty}h(A,A_n)=0$.

由 (3.2.7) 式，可知当 $n\geqslant\alpha_k$ 时，有

$$\overline{\bigcup_{i=\alpha_k}^{\infty}A_i}\subset N_{1/k}(A_n).$$

于是 $A\subset N_{1/k}(A_n)$.

另一方面，当 $n\geqslant\alpha_k$ 时，如果 $x\in A_n$，由 (3.2.7) 式可知，对任意 $m\geq n$，有

$$x\in A_n\subset N_{1/k}(A_m).$$

取 $y_m\in A_m$，使得 $|x-y_m|\leqslant 1/k$. 注意到 $\{y_m\}_{m=n}^{\infty}$ 是紧集 $\overline{\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m}$ 中的一个序列，所以由紧集和列紧集的等价性，可知

存在 $\{y_m\}_{m=n}^{\infty}$ 的一个收敛子列. 设该收敛子列的极限为 y, 则 $|x-y| \leqslant 1/k$. 由 $y_m \in A_m \subset \bigcup_{i=m}^{\infty} A_i$, 可知对任意 $m \geqslant n$, 有

$$y \in \overline{\bigcup_{i=m}^{\infty} A_i}.$$

于是

$$y \in \bigcap_{m=n}^{\infty} \overline{\bigcup_{i=m}^{\infty} A_i} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{i=m}^{\infty} A_i} = A.$$

所以 $x \in N_{1/k}(A)$. 由 x 的任意性, 可得 $A_n \subset N_{1/k}(A)$.

综上分析, 当 $n \geqslant \alpha_k$ 时, 有 $h(A, A_n) \leqslant 1/k$. 这证明了当 $n \to \infty$ 时, 有 $h(A, A_n) \to 0$. □

§ 3.3 迭代函数系(IFS)

设 $(X;d)$ 是一个完备度量空间, $\{f_n\}_{n=1}^{N}$ 是 $X \to X$ 的一族连续函数. 我们称 $\{X; f_n, n=1,2,\ldots,N\}$ 是一个迭代函数系. 在不引起混淆的情况下, 有时也简称 $\{f_n\}_{n=1}^{N}$ 是一个迭代函数系.

定义集值函数 f 如下, 对任意 $x^* \in X$, 有

$$f(x^*) \doteq \bigcup_{n=1}^{N} f_n(x^*) = \{f_1(x^*), f_2(x^*), \cdots, f_N(x^*)\}.$$

作函数复合, 有

$$f^2(x^*) = f\left(f(x^*)\right) = \{f_{n_1}\left(f_{n_2}(x^*)\right) | n_1, n_2 = 1, 2, \cdots, N\},$$

一般地, 有

$$f^k(x^*) = f\left(f^{k-1}(x^*)\right)$$

$$= \{f_{n_1}(f_{n_2}(\cdots(f_{n_k}(x^*))))\,|n_1, n_2, \cdots, n_k = 1, 2, \cdots, N\}.$$

规定 $f^0(x^*) = \{x^*\}$. **现在讨论当** $k \to \infty$ **时，**$f^k(x^*)$ **的性态.**

定义 3.3. 设 $x^* \in X$，称

$$A(x^*) = \lim_{k\to\infty} f^k(x^*)$$

是 $\{X; f_1, f_2, \cdots, f_N\}$ 的 (对应 x^* 的) 吸引子 (attractor)，其中极限的定义是：点 $a \in A(x^*)$ 当且仅当对 a 的任意一个 ε 邻域 $O(a;\varepsilon)$，存在无穷多个 k，使得

$$O(a;\varepsilon) \cap f^k(x^*) \neq \varnothing.$$

就是说，$A(x^*)$ 是 $\{f^k(x^*)\}_{k=0}^{\infty}$ 的极限点集.

注意到 $a \in A(x^*)$ **等价于存在一列** $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} f^k(x^*)$，**使得** $a_i \in f^{k_i}(x^*)$ **且** $0 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots$ **是一个严格单调递增序列，满足** $\lim_{i\to\infty} a_i = a$.

定理 3.6. 若 $(X;d)$ 是紧度量空间，则吸引子 $A(x^*)$ 是紧集，且它关于 f 是不变的，即 $f(A(x^*)) = A(x^*)$.

证明　**任取** $A(x^*)$ **中的一个收敛序列** $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$，**设** $\lim_{i\to\infty} a_i = a$. **由** $a_1 \in A(x^*)$**可知，存在** k_1 **及** $b_1 \in f^{k_1}(x^*)$，**使得** $|b_1 - a_1| < 1$. **由** $a_2 \in A(x^*)$ **可知，存在** $k_2 > k_1$ **及** $b_2 \in f^{k_2}(x^*)$，**使得** $|b_2 - a_2| < 1/2$. **一般地，对于** $i = 1, 2, \ldots$，**存在** $k_{i+1} > k_i$ **及** $b_{i+1} \in f^{k_{i+1}}(x^*)$，**使得** $|b_{i+1} - a_{i+1}| < 1/(i+1)$. **于是我们得到一列** $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} f^{k_i}(x^*)$，**满足** $b_i \in f^{k_i}(x^*)$ **且** $\{k_i\}$ **是一个严格单调递增序列. 由** $\lim_{i\to\infty} |b_i - a_i| = 0$ **及** $\lim_{i\to\infty} a_i = a$ **可得，**$\lim_{i\to\infty} b_i = a$，

于是 $a \in A(x^*)$，从而证明了 $A(x^*)$ 是闭集．因为 X 是紧集，所以由紧集的闭子集是紧集，可得 $A(x^*)$ 是紧集．

现在证明 $f(A(x^*)) \subset A(x^*)$．设 $a \in A(x^*)$，则存在一列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} f^{k_i}(x^*)$，使得 $a_i \in f^{k_i}(x^*)$ 且 $0 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots$ 是一个严格单调递增序列，满足 $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = a$．对于 $n = 1, 2, \ldots, N$，由 f_n 的连续性可知，$\lim\limits_{i\to\infty} f_n(a_i) = f_n(a)$．因为 $f_n(a_i) \in f^{k_i+1}(x^*)$ 且 $\{k_i+1\}$ 是一个严格单调递增序列，所以 $f_n(a) \in A(x^*)$．这就证明了 $f(A(x^*)) \subset A(x^*)$．

反过来，若 $a \in A(x^*)$，现在要证明存在 $b \in A(x^*)$ 和 $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$，使得 $a = f_n(b)$．由 $a \in A(x^*)$ 可知，存在一列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} f^{k_i}(x^*)$，使得 $a_i \in f^{k_i}(x^*)$ 且 $0 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots$ 是一个严格单调递增序列，满足 $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = a$．当 $i = 1, 2, \ldots$ 时，由 $k_{i+1} \geqslant 1$ 及 $a_{i+1} \in f^{k_{i+1}}(x^*)$可知，存在 $b_i \in f^{k_{i+1}-1}(x^*)$ 及 $n_i \in \{1, 2, \ldots, N\}$，使得

$$f_{n_i}(b_i) = a_{i+1}.$$

由于 n_i 只能在 $\{1, 2, \ldots, N\}$ 中取值，不妨假设它们都取同一个值 n（不破坏一般性）．这样有

$$f_n(b_i) = a_{i+1}.$$

因为 X 是紧集，所以点列 $\{b_i\}$ 存在收敛子列，设其极限为 b．不妨设该子列就是 $\{b_i\}$，于是 $\lim\limits_{i\to\infty} b_i = b$．由 $b_i \in f^{k_{i+1}-1}(x^*)$ 且 $\{k_{i+1}-1\}$ 是一个严格单调递增序列，可知 $b \in A(x^*)$．最后由 f 的连续性，有

$$f_n(b) = f_n(\lim_{i\to\infty} b_i) = \lim_{i\to\infty} f_n(b_i) = \lim_{i\to\infty} a_{i+1} = a.$$

从而 $a \in f(A(x^*))$. 这证明了$A(x^*) \subset f(A(x^*))$. □

当定理中的吸引子 $A(x^*)$ 与 x^* 的选取无关时，可用记号 A 代替 $A(x^*)$. 这种情况将是我们接下去研究的对象.

引理 3.3. 设 f 是完备度量空间 $(X;d)$ 上的压缩映射，s 是压缩因子，定义

$$f(B) \doteq \{f(x)|x \in B\}, \quad B \in \mathcal{H}(X),$$

则 f 是 $\mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$ 的压缩映射，并且压缩因子也是 s，即

$$h(f(A), f(B)) \leqslant sh(A, B), \quad \forall A, B \in \mathcal{H}(X). \tag{3.3.1}$$

证明 设 $A \in \mathcal{H}(X)$ 是 X 的紧子集，因为 f 是连续变换，所以 $f(A)$ 也是 X 的紧子集，因此 f 是 $\mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$ 的映射. 任取 $A, B \in \mathcal{H}(X)$，有

$$\begin{aligned} d(f(A), f(B)) &= \max_{x\in A}\{\min_{y\in B} d(f(x), f(y))\} \\ &\leqslant \max_{x\in A}\{\min_{y\in B} s \cdot d(x,y)\} = sd(A,B). \end{aligned}$$

同理可证

$$d(f(B), f(A)) \leqslant sd(B, A).$$

于是

$$h(f(A), f(B)) \leqslant sh(A, B).$$

□

定理 3.7. 设 $f_n(n = 1, 2, \cdots, N)$ 是完备度量空间 $(X;d)$ 上的一族压缩映射，压缩因子 $0 \leqslant s_n < 1, n = 1, 2, \cdots, N$.

定义变换 $f:\mathcal{H}(X)\to\mathcal{H}(X)$ 如下:

$$f(B)\doteq\bigcup_{n=1}^{N}f_n(B),\quad B\in\mathcal{H}(X).\tag{3.3.2}$$

则 f 是 $(\mathcal{H}(X),h)$ 上的压缩映射，压缩因子是 $s=\max\limits_{1\leqslant n\leqslant N}s_n<1$，即

$$h(f(A),f(B))\leqslant sh(A,B),\quad \forall A,B\in\mathcal{H}(X).\tag{3.3.3}$$

证明 设 $A,B\in\mathcal{H}(X)$，由定理 3.4 及引理 3.3 得

$$\begin{aligned}h(f(A),f(B)) &= h\left(\bigcup_{n=1}^{N}f_n(A),\bigcup_{n=1}^{N}f_n(B)\right)\\ &\leqslant h(f_1(A),f_1(B))\vee\cdots\vee h(f_N(A),f_N(B))\\ &\leqslant s_1h(A,B)\vee s_2h(A,B)\vee\cdots\vee s_Nh(A,B)\\ &= sh(A,B).\end{aligned}$$

□

由 (3.3.2) 式定义的算子 f 常被称为 Hutchinson 算子.

定义 3.4. 若 $f_n(n=1,2,\cdots,N)$ 是完备度量空间 $(X;d)$ 上的压缩映射，则称 $\{f_1,\cdots,f_N\}$ 构成一个双曲 (hyperbolic) 迭代函数系. 以后常用记号 $\{X;f_n,n=1,2,\cdots,N\}$ 来表示该迭代函数系.

由定理 3.7 知，Hutchinson 算子 f 是 $(\mathcal{H}(X),h)$ 上的压缩映射，根据 Banach 不动点原理直接可得下述结果.

定理 3.8. 设 $\{X;f_n,n=1,2,\cdots,N\}$ 是完备度量空间 $(X;d)$

上的双曲迭代函数系，则存在惟一的非空紧集 $A \subset X$，使得

$$A = f(A) = \bigcup_{n=1}^{N} f_n(A), \tag{3.3.4}$$

且

$$f^n(A_0) \xrightarrow{h} A, \quad \text{其中 } A_0 \text{ 是 } \mathcal{H}(X) \text{ 中任一元素}.$$

集合A称为迭代函数系的不变集或吸引子.

例 3.1. 考虑平面上的两个仿射变换:

$$f_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$f_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$.

容易验证

$$d_2(f_i(\mathbf{x}), f_i(\mathbf{y})) = \frac{1}{2} d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, \quad i = 1, 2,$$

其中 $d_2(\cdot,\cdot)$ 表示欧氏距离 (见 (3.1.2) 式). 因此 f_1, f_2 是 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 的压缩变换，压缩因子都是 $1/2$. 记 $I = [0,1] \times [0,1]$，则有

$$f_i(I) \subset I, \quad i = 1, 2,$$

于是 $\{I; f_1, f_2\}$ 构成一个双曲迭代函数系. 令

$$A = \left\{ (x, x)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \leqslant x \leqslant 1 \right\}$$

是单位正方形的对角线，不难验证

$$A = f_1(A) \cup f_2(A),$$

因此 A 是该迭代函数系的吸引子．若取

$$A_0 = \left\{ (\frac{1}{2}, y)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \leqslant y \leqslant 1 \right\}$$

作为初始集，进行迭代

$$A_1 = \bigcup_{i=1}^{2} f_i(A_0), \quad A_2 = \bigcup_{i=1}^{2} f_i(A_1), \quad \cdots$$

所得序列 $\{A_n\}$ 将很快收敛到吸引子 A (见图 3.2)．

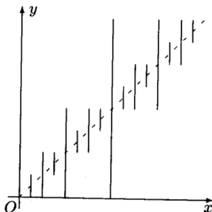


图 3.2

当双曲迭代函数系 $\{X; f_n, n = 1, 2, \cdots, N\}$ 中的函数 f_n 依赖于某个参数时，它的吸引子亦将随参数的变动而变化．一个自然的问题是：什么时候这种变化是连续的？也就是说，参数的微小变化

只会引起吸引子的微小变化．如果这样，那是非常有意义的，我们可以调整参数达到连续控制吸引子的目的，这对图象的计算机模拟很有用．下面我们就来讨论这个问题．

设 $(\Lambda; d_\Lambda)$ 是度量空间，给定函数 $f_n(x,\lambda)(n=1,2,\cdots,N)$，

$$f_n(x,\lambda):\quad X\times\Lambda\to X$$

满足条件：

$$\begin{cases} 1^\circ \quad \text{对每个固定 } \lambda\in\Lambda,\ f_n \text{ 是 } X \text{ 上的压缩映射,} \\ \qquad \text{压缩因子 } 0\leqslant s_n<1, \\ 2^\circ \quad \text{对每个固定 } x\in X,\ f_n \text{ 是 } \Lambda \text{ 上的连续函数.} \end{cases} \tag{3.3.5}$$

易见 $f_n(x,\lambda)$ 一定在 $X\times\Lambda$ 上是连续的．

构造 Hutchinson 算子

$$f(B,\lambda)=\bigcup_{n=1}^{N} f_n(B,\lambda),\quad B\in\mathcal{H}(X).$$

设 $A(\lambda)$ 是其吸引子，那么有

$$A(\lambda)=\bigcup_{n=1}^{N} f_n(A(\lambda),\lambda)=f(A(\lambda),\lambda).$$

现在证明 $A(\lambda)$ 在 Hausdorff 度量下是连续的．

引理 3.4. 设 $(X;d)$ 是度量空间，$(\Lambda;d_\Lambda)$ 是紧度量空间，假定 (3.3.5) 式成立，则对 $\forall B\in\mathcal{H}(X)$，$f(B,\lambda)$ 在 Hausdorff 度量下关于 λ 是连续的．

证明 由定理 3.4 可知，只要考虑 $N=1$ 的情形就足够了．设 $B\in\mathcal{H}(X)$，$\lambda_1,\lambda_2\in\Lambda$，则有

$$d(f_1(B,\lambda_1),f_1(B,\lambda_2)) = \max_{x\in B}\min_{y\in B} d(f_1(x,\lambda_1),f_1(y,\lambda_2))$$

$$\leqslant \max_{x\in B}\min_{y\in B}\{d(f_1(x,\lambda_1),f_1(y,\lambda_1))+d(f_1(y,\lambda_1),f_1(y,\lambda_2))\}.$$

因为 $B\times\Lambda$ 是紧集，$f_1(x,\lambda)$ 在其上连续，因此是一致连续．于是对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对 $\forall y\in B$，只要 $d_\Lambda(\lambda_1,\lambda_2)<\delta$，就有

$$d(f_1(y,\lambda_1),f_1(y,\lambda_2))<\varepsilon.$$

于是

$$\begin{aligned}d(f_1(B,\lambda_1),f_1(B,\lambda_2)) &\leqslant \max_{x\in B}\min_{y\in B}\{d(f_1(x,\lambda_1),f_1(y,\lambda_1))+\varepsilon\}\\ &= d(f_1(B,\lambda_1),f_1(B,\lambda_1))+\varepsilon=\varepsilon.\end{aligned}$$

同样可证，当 $d_\Lambda(\lambda_1,\lambda_2)<\delta$ 时，有

$$d(f_1(B,\lambda_2),f_1(B,\lambda_1))\leqslant\varepsilon.$$

所以，当 $d_\Lambda(\lambda_1,\lambda_2)<\delta$ 时，

$$h(f_1(B,\lambda_2),f_1(B,\lambda_1))\leqslant\varepsilon.$$

□

定理 3.9. 在引理 3.4 的假定下，$f(B,\lambda)$ 的吸引子 $A(\lambda)$ 在 Hausdorff 度量下连续依赖参数 λ.

证明 设 $\lambda_0,\lambda\in\Lambda$，

$$\begin{aligned}h(A(\lambda_0),A(\lambda)) &= h(f(A(\lambda_0),\lambda_0),f(A(\lambda),\lambda))\\ &\leqslant h(f(A(\lambda_0),\lambda_0),f(A(\lambda_0),\lambda))\\ &\quad + h(f(A(\lambda_0),\lambda),f(A(\lambda),\lambda)).\end{aligned}$$

由引理 3.4，对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $d_\Lambda(\lambda_0,\lambda)<\delta$ 时，有

$$h(f(A(\lambda_0),\lambda_0),f(A(\lambda_0),\lambda))<\varepsilon.$$

因此，再由定理 3.7，可得

$$h(A(\lambda_0),A(\lambda))\leqslant\varepsilon+sh(A(\lambda_0),A(\lambda)),\quad s=\max_{1\leqslant n\leqslant N}s_n<1\ ,$$

即

$$h(A(\lambda_0),A(\lambda))\leqslant\frac{\varepsilon}{1-s}.$$

□

在结束本节之前，简单介绍一种所谓弱 (weak) 迭代函数系.

定义 3.5. 设 $f_n\,(n=1,2,\ldots,N)$ 是 X 到 X 的映射，若对于任意的 n，有

$$d(f_n(x),f_n(y))<d(x,y),\quad\forall x,y\in X,\quad x\neq y,\tag{3.3.6}$$

则称 $\{X;f_1,\ldots,f_N\}$ 构成一个弱迭代函数系.

弱迭代函数系也有类似定理 3.8 的结果，但此时要求 $(X;d)$ 是紧度量空间.

仍记

$$f(B)=\bigcup_{n=1}^{N}f_n(B),\quad B\in\mathcal{H}(X).$$

定理 3.10. 设 $(X;d)$ 是紧度量空间，$\{X;f_1,\ldots,f_N\}$ 是弱迭代函数系，则存在惟一的 $A\in\mathcal{H}(X)$，有 $f(A)=A$，且

$$f^n(B)\xrightarrow{h}A,\ n\to\infty,\quad\forall B\in\mathcal{H}(X).$$

定理证明从略，有兴趣的读者可参阅文献 [3].　□

§ 3.4 仿射变换和相似变换

3.4.1 仿射变换

n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的仿射变换是一类重要的变换，在迭代函数系 $\{\mathbb{R}^n; f_n, n=1,2,\cdots,N\}$ 中，映射 f_n 在实用上多是采用仿射变换. Cantor 三分集、Sierpinski 垫片和 Koch 曲线都是由仿射变换构成的迭代函数系的吸引子. 本节需要讨论判别仿射变换是压缩变换的准则.

设 f 是 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的仿射变换：对任意 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$，有

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{t}, \tag{3.4.1}$$

其中 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 是 $n \times n$ 非奇异矩阵，$\mathbf{t} = (t_1, t_2, \cdots, t_n)^{\mathrm{T}}$ 是常向量.

用 $|\mathbf{x}|$ 表示向量 $\mathbf{x}$ 的范数，常见有下面几种定义：

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}|_1 &\doteq \sum_{i=1}^{n} |x_i|; \\ |\mathbf{x}|_2 &\doteq (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}; \\ |\mathbf{x}|_\infty &\doteq \max_{1\leqslant i\leqslant n} \{|x_i|\}. \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

用范数可定义 $\mathbb{R}^n$ 中的距离，$|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ 表示 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 之间的距离. 当采用不同的范数定义时，向量范数的大小一般并不相等，但在研究向量序列的收敛性时，表现却是一致的. 具体讲，就是如果向量序列 $\{x^{(k)}\}$ 在某一种范数意义下收敛，那么在其他范数意义下，

这序列也是收敛的，并具有相同的极限．这种性质称为范数的等价性．

用 $\|\mathbf{A}\|$ 表示矩阵 A 的范数，它的定义是

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{|\mathbf{x}|=1} |\mathbf{A}\mathbf{x}|. \tag{3.4.3}$$

由线性代数知，与 (3.4.2) 三种向量范数对应的矩阵范数分别是

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\|_1 &= \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|; \\ \|\mathbf{A}\|_2 &= \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \text{ 最大特征值的平方根，称为 A 的谱范数}; \\ \|\mathbf{A}\|_\infty &= \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

由 (3.4.1) 式，我们有

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

由 (3.4.3) 的定义，可得

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leqslant \|\mathbf{A}\| \cdot |\mathbf{x}-\mathbf{y}|. \tag{3.4.5}$$

于是若 $\|\mathbf{A}\| < 1$，那末由 (3.4.1) 式所定义的仿射变换 f 是一个压缩变换．特别对平面 $\mathbb{R}^2$ 上的仿射变换

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix}, \tag{3.4.6}$$

当满足下列第 i (i=1,2,3) 个条件时，f 将是 $(\mathbb{R}^2; d_i)$ 上的压缩变换．

(1) $|a| + |c| < 1, \quad |b| + |d| < 1;$

(2) $a^2+b^2+c^2+d^2$

$$+\left\{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2-4(ad-bc)^2\right\}^{\frac{1}{2}}<2. \tag{3.4.7}$$

(3) $|a|+|b|<1,\quad |c|+|d|<1;$

定理 3.11. 设 I,J 是 $\mathbb{R}$ 上的两个闭区间，记 $K=I\times J$，设变换 $f:K\to\mathbb{R}^2$ 定义如下

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L(x) \\ F(x,y) \end{pmatrix}. \tag{3.4.8}$$

假定存在常数 α,β,γ 满足 $0\le\alpha<1$，$\beta\ge 0$，$0\le\gamma<1$，使得

(1) $|L(x_1)-L(x_2)|\leqslant\alpha\,|x_1-x_2|,\quad \forall x_1,x_2\in I,$

(2) $|F(x_1,y)-F(x_2,y)|\leqslant\beta\,|x_1-x_2|,\quad \forall x_1,x_2\in I,\quad \forall y\in J,$

(3) $|F(x,y_1)-F(x,y_2)|\leqslant\gamma\,|y_1-y_2|,\quad \forall x\in I,\quad \forall y_1,y_2\in J,$

则存在 $\mathbb{R}^2$ 中度量 $\widetilde{d}$:

$$\widetilde{d}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)\doteq|x_1-x_2|+\theta|y_1-y_2|,\ \text{其中 }\theta\text{ 是某正常数}, \tag{3.4.9}$$

使变换 f 在该度量下是压缩的.

证明 由 (3.4.9) 式,

$$\begin{aligned}
&\widetilde{d}\left(f\left((x_1,y_1)^{\mathrm{T}}\right),f\left((x_2,y_2)^{\mathrm{T}}\right)\right)\\
&\qquad=|L(x_1)-L(x_2)|+\theta|F(x_1,y_1)-F(x_2,y_2)|\\
&\qquad\leqslant\alpha|x_1-x_2|+\theta(|F(x_1,y_1)-F(x_2,y_1)|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+|F(x_2, y_1) - F(x_2, y_2)|) \\
&\leqslant \alpha|x_1 - x_2| + \theta(\beta|x_1 - x_2| + \gamma|y_1 - y_2|) \\
&= (\alpha + \theta\beta)|x_1 - x_2| + \theta\gamma|y_1 - y_2|.
\end{aligned}
$$

取 $\theta = (1-\alpha)/(2\beta) > 0$ (这里假设 $\beta > 0$，当 $\beta = 0$ 时，取 $\theta = 1$，可同样证明). 记 $\overline{\alpha} = \alpha + \theta\beta$，则 $\overline{\alpha} = (1+\alpha)/2 < 1$，这样有

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{d}\left(f\left((x_1, y_1)^{\mathrm{T}}\right), f\left((x_2, y_2)^{\mathrm{T}}\right)\right) \\
&\leqslant \max(\overline{\alpha}, \gamma)\left(|x_1 - x_2| + \theta|y_1 - y_2|\right) \\
&= \max(\overline{\alpha}, \gamma)\tilde{d}\left((x_1, y_1)^{\mathrm{T}}, (x_2, y_2)^{\mathrm{T}}\right).
\end{aligned}
$$

因为 $\max(\overline{\alpha}, \gamma) < 1$，所以 f 在度量 $\widetilde{d}$ 下是压缩变换. □

推论 3.2. 给定仿射变换

$$
f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix}, \tag{3.4.10}
$$

如果 $|a| < 1$ 且 $|d| < 1$，则 f 在某度量下是压缩变换.

3.4.2 相似变换

给定映射 $S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，若存在正常数 c，有

$$
|S(\mathbf{x}) - S(\mathbf{y})| = c|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \tag{3.4.11}
$$

其中 $|\cdot|$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上某种范数，则称 S 是 $\mathbb{R}^n$ 上的相似变换，c 称为相似比.

设 $S_1, S_2, \cdots, S_N$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上一族相似变换，相似比 $0 < c_i < 1$，$i = 1, 2, \cdots, N$，那么 $\{\mathbb{R}^n; S_i, i = 1, 2, \cdots, N\}$ 组成一个双曲迭代函数系．由定理 3.8 知存在吸引子 A，使得

$$A = \bigcup_{i=1}^{N} S_i(A).$$

从上式可见，吸引子 A 是由 N 个较小的部分拼装而成，且每个小部分都是与整体 A 是相似的，因此我们称 A 是一个自相似集．

第一章中的 Cantor 三分集、Sierpinski 垫片及 Koch 曲线都是一族自相似变换的吸引子，因此都是典型的自相似集．

在一定条件下，自相似集的 Hausdorff 维数和盒维数是容易确定的．现在假定在 $A = \bigcup_{i=1}^{N} S_i(A)$ 中，$\{S_i(A)\}$ 彼此间“几乎不相交”，就是说，当 $s = \dim_H A$ 时，有下面等式成立．

$$\mathcal{H}^s(A) = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{H}^s(S_i(A)) = \sum_{i=1}^{N} c_i^s \mathcal{H}^s(A), \tag{3.4.12}$$

其中第二个等式容易从 § 2.2 中的推论 2.1得到．

若再假定 $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$，这样从等式 (3.4.12) 可得

$$\sum_{i=1}^{N} c_i^s = 1. \tag{3.4.13}$$

解这个关于 s 的方程，就可得到 A 的 Hausdorff 维数．

为了保证 A 的各部分 $\{S_i(A)\}$ 之间不会重叠“太多”，只要 $\{S_i\}$ 满足下面的“开集条件”．

定义 3.6. 称 $\{S_i\}$ 满足开集条件，如果存在非空有界开集 V，有

$$\{S_i(V)\} \text{ 彼此不交，且 } \bigcup_{i=1}^{N} S_i(V) \subset V. \tag{3.4.14}$$

定理 3.12. 设 $S_i\,(1 \leqslant i \leqslant N)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的相似变换，其相似比为 c_i. 假设开集条件 (3.4.14) 满足. 设 A 是其吸引子，则有

$$\dim_H A = \dim_H B = s,$$

其中 s 是方程 (3.4.13) 的解，并对于这个 s 值，有 $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$.

定理证明从略. 有兴趣的读者可参阅文献 [16, 46]. □

例 3.2. 以 Cantor 三分集为例，此时 $S_1(x) = x/3$，$S_2(x) = x/3+2/3$，若取 $V=(0,1)$，显然有 $S_1(V)\cap S_2(V) = \varnothing$，且 $S_1(V)\cup S_2(V) \subset V$，因此 $\{S_1, S_2\}$ 满足开集条件. 由定理 3.12，Cantor 集的维数 s 由方程 $1/3^s + 1/3^s = 1$ 确定，解之可得 $s = \log 2/\log 3$.

在平面欧氏空间 $\mathbb{R}^2$ 中，相似的仿射变换有下面两种形式:

$$f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix}, \tag{3.4.15}$$

$$f_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ r\sin\theta & -r\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix}, \tag{3.4.16}$$

其中 θ 称为转角，r 是相似比. 相似变换可以分解成以下四种基本的相似变换:

(1) 旋转变换 R_θ:

$$R_\theta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

它是绕坐标原点逆时针旋转角度 θ 的变换.

(2) 反射变换 R:

$$R\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

它是以 x 轴为反射壁的变换.

(3) 伸缩变换 Φ:

$$\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

它是沿极线方向伸缩 r 倍的变换.

(4) 平移变换 T:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix}.$$

这样相似变换 (3.4.15), (3.4.16) 可以分别写成这些基本变换的复合:

$$f_1 = T\circ\Phi\circ R_\theta, \qquad f_2 = T\circ\Phi\circ R_\theta\circ R.$$

§3.5 带概率的迭代函数系(Iterated function systems with probability)

设$\{X; f_1, \cdots, f_N\}$是一个迭代函数系，$\mathrm{p} = \{p_1, \cdots, p_N\}$是一个给定的概率向量，其中$p_i \geqslant 0$对所有$i$成立，并且$\sum_{i=1}^N p_i = 1$. 又给定独立随机变量序列$\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots$，有

$$Prob(\xi_n = i) = p_i, \quad i = 1, 2, \cdots, N, \quad \forall n.$$

考虑随机动力系统:

$$x_{n+1} = f_{\xi_n}(x_n), \quad n = 0, 1, \cdots. \tag{3.5.1}$$

这个随机迭代过程是这样进行的: 首先取定初始点$x_0 \in X$，接着以概率p_{i_0}取值

$$x_1 = f_{i_0}(x_0),$$

再以概率p_{i_1}取值$x_2 = f_{i_1}(x_1)$，依次迭代下去，构成一个随机迭代序列$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$. 我们感兴趣的是: 这个序列$\{x_n\}$是否收敛? 如果收敛，它的极限又是什么? 下面就讨论这个问题.

用记号$\{X; \mathrm{p}; f_1, \cdots, f_N\}$表示上述带概率的迭代函数系(Iterated function systems with probability, 简记为IFSP). 当$\{X; f_1, \cdots, f_N\}$是双曲迭代函数系时，我们称$\{X; \mathrm{p}; f_1, \cdots, f_N\}$是双曲IFSP.

引理 3.5. 设$\{X; f_1, \cdots, f_N\}$是双曲迭代函数系，A是它的吸引子，又f是Hutchinson算子(见(3.3.2)式). 则存在$A_0 \in$

$\mathcal{H}(X)$，有 $f(A_0) \subset A_0$. 若记 $A_n = f^n(A_0)$，则有

$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A, \tag{3.5.2}$$

且 $A_n \xrightarrow{h} A, \quad n \to \infty.$

显然，若取 $A_0 = A$，就可得到引理的证明. 下面我们再用构造性的方法来证明这个引理，请读者仔细体会压缩因子的作用.

证明 任取 $x_0 \in X$，记

$$r = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} |x_0 - f_i(x_0)|, \quad s = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} s_i < 1,$$

其中 s_i 是 f_i 的压缩因子. 取 $\beta \geqslant 1/(1-s)$，记

$$\overline{O}(x_0; \beta r) = \left\{ x \in X \,\middle|\, |x - x_0| \leqslant \beta r \right\}.$$

如果 $y \in \overline{O}(x_0; \beta r)$，那末有

$$\begin{aligned} |f_i(y) - x_0| &= |f_i(y) - f_i(x_0) + f_i(x_0) - x_0| \\ &\leqslant s_i|y - x_0| + r \leqslant s_i \cdot \beta r + r \leqslant (1 + s\beta)r. \end{aligned}$$

由假定 $\beta \geqslant 1/(1-s)$，可知 $\beta \geqslant 1 + s\beta$，于是 $|f_i(y) - x_0| \leqslant \beta r$，即

$$f_i(y) \in \overline{O}(x_0; \beta r),$$

因此

$$f(\overline{O}(x_0, \beta r)) \subset \overline{O}(x_0; \beta r).$$

为此可取 $A_0 = \overline{O}(x_0; \beta r) \in \mathcal{H}(X)$. 由上式知 $A_0 \supset f(A_0) = A_1$，又若在这包含关系的两端，再同时作用 f，可得 $A_1 \supset f(A_1) =$

$f^2(A_0) = A_2$. 依次类推，有 $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$. 又由定理 3.8 可得 $A_n \xrightarrow{h} A$.

余下要证明对任意的 n，有 $A_n \supset A$. 设 $x \in A$，由于 $h(A_{n+k}, A) \to 0 \quad (k \to \infty)$，所以一定存在 $x_k \in A_{n+k}$，使 $x_k \to x \quad (k \to \infty)$，又注意到 $A_n \supset A_{n+k}, \forall k$，因此对 $\forall k$，有 $x_k \in A_n$. 因为 A_n 是闭集，x 是它的极限点，所以 $x \in A_n$. □

定理 3.13. 若 $\{X; \mathbf{p}; f_1, \cdots, f_N\}$ 是双曲 IFSP，对任意 $x_0 \in X$，令

$$x_{n+1} = f_{\xi_n}(x_n), \quad n = 0, 1, \cdots,$$

其中 $Prob(\xi_n = i) = p_i, \quad i = 1, 2, \cdots, N$. 则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $n_0 = n_0(\varepsilon)$ 和 $k_0 = k_0(\varepsilon)$，使得当 $n \geqslant n_0$ 和 $k \geqslant k_0$ 时，有

$$Prob\{h(\{x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+k}\}, A) < \varepsilon\} > 1 - \varepsilon, \tag{3.5.3}$$

其中 A 是 $\{X; f_1, \cdots, f_N\}$ 的吸引子.

定理 3.13 指出了这样一个事实，如果在随机迭代序列 $\{x_n\}$ 中，除去最前面的 n_0 项 (或更多些)，那末对于充分长的一段 $\{x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+k}\}$，它与吸引子 A 的 Hausdorff 距离小于 ε 的可能性 (概率) 将超过 $1 - \varepsilon$.

证明 由引理 3.5 知存在紧子集 $A_0 \in \mathcal{H}(X)$，有 $f(A_0) \subset A_0$，又 $A_n = f^n(A_0), n = 1, 2, \ldots$ 是递减的集序列，且 $f^n(A_0) \xrightarrow{h} A$. 因此对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $n_0(\varepsilon)$，有

$$h(A_n, A) < \varepsilon, \quad 当\ n \geqslant n_0(\varepsilon).$$

因为 $x_n \in A_n$，因而总存在 $z_n \in A$，使得

$$|x_n - z_n| < \varepsilon, \quad n \geqslant n_0(\varepsilon).$$

这意味着，当 $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ 时，有

$$\{x_n, x_{n+1}, \cdots\} \subset N_\varepsilon(A), \tag{3.5.4}$$

这就证明了 (3.5.3) 式中的一半，且 $n_0 = n_0(\varepsilon)$ 也已确定，接下去要考虑集 A 被 $\{x_n\}$ 的逼近程度.

因 $A \in \mathcal{H}(X)$ 是 X 中的紧子集，所以存在有限点列 $a_i \in A$，$i = 1, 2, \cdots, q$，有

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{q} O(a_i; \varepsilon/2),$$

其中 $O(a_i; \varepsilon/2)$ 表示以 a_i 为中心，$\varepsilon/2$ 为半径的开球.

现在证明，$\forall u \in A_{n_0}$，总存在 $\alpha(i,1), \alpha(i,2), \cdots, \alpha(i,r) \in \{1, 2, \cdots, N\}$，只要 r 足够大，就有

$$\left|f_{\alpha(i,1)} \circ f_{\alpha(i,2)} \circ \cdots \circ f_{\alpha(i,r)}(u) - a_i\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad i = 1, 2, \cdots, q. \tag{3.5.5}$$

事实上，任意取定 A_{n_0} 中的一点 u'，对单点集 $\{u'\}$，也有 $f^r(\{u'\}) \xrightarrow{h} A$ (当 $r \to \infty$)，因此对足够大的 r，有

$$h\left(f^r(\{u'\}), A\right) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

注意到集合 $f^r(\{u'\})$ 都是由 $f_{\alpha_1} \circ f_{\alpha_2} \circ \cdots \circ f_{\alpha_r}(u')$ 形状的点组成的，其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \in \{1, 2, \cdots, N\}$. 于是对于每个 i，

必存在数列 $\alpha(i,1),\cdots,\alpha(i,r)$，有

$$\left|f_{\alpha(i,1)}\circ\cdots\circ f_{\alpha(i,r)}(u')-a_i\right|<\frac{\varepsilon}{4},\quad i=1,2,\cdots,q. \tag{3.5.6}$$

现在令 u 在 A_{n_0} 中变动，则对 $\forall i\in\{1,2,\cdots,q\}$，有

$$\left|f_{\alpha(i,1)}\circ\cdots\circ f_{\alpha(i,r)}(u)-f_{\alpha(i,1)}\circ\cdots\circ f_{\alpha(i,r)}(u')\right|\leqslant s^r\cdot c, \tag{3.5.7}$$

其中 s 是 Hutchinson 算子 f 的压缩因子，$c=|A_0|$ 是 A_0 的直径．由于 $0<s<1$，当 r 足够大时，有 $s^r\cdot c<\varepsilon/4$．结合 (3.5.6) 和 (3.5.7) 两式可得 (3.5.5) 式的证明．

现在假定 $n\geqslant n_0$，取一序列段 $x_n,x_{n+1},\cdots,x_{n+k}$．注意到

$$x_{n+j}=f_{\xi_{n+j-1}}\circ\cdots\circ f_{\xi_n}(x_n),\quad x_{n+j}\in A_{n_0},0<j\leqslant k.$$

如果在 $\xi_n,\xi_{n+1},\cdots,\xi_{n+k-1}$ 中包含 $\alpha(i,1),\alpha(i,2),\cdots,\alpha(i,r)$，就是说存在某个 $0\leqslant j<k$，使得有

$$\begin{cases}\xi_{n+j+r-1}&=\alpha(i,1),\\ \quad\vdots\\ \xi_{n+j}&=\alpha(i,r).\end{cases} \tag{3.5.8}$$

这时由 (3.5.5) 知

$$\begin{aligned}x_{n+j+r}&=f_{\xi_{n+j+r-1}}\circ\cdots\circ f_{\xi_{n+j}}(x_{n+j})\\ &=f_{\alpha(i,1)}\circ\cdots\circ f_{\alpha(i,r)}(x_{n+j})\in O(a_i;\frac{\varepsilon}{2}).\end{aligned}$$

对于固定的 j，事件 (3.5.8) 发生的概率是 $p_{\alpha(i,1)}\cdots p_{\alpha(i,r)}$．若记 $p=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}p_i$，则该事件不发生的概率不超过 $1-p^r$．于是对于序列

$$\xi_n,\xi_{n+1},\cdots,\xi_{n+k},\quad k\geqslant rm,\quad m\text{ 是自然数}. \tag{3.5.9}$$

不含 $\alpha(i,1),\alpha(i,2),\cdots,\alpha(i,r)$ 的概率将不超过 $(1-p^r)^m$. 令 m 足够大，使得

$$(1-p^r)^m \leqslant \frac{\varepsilon}{q}.$$

记 $k_0=rm$，这样当 $k\geqslant k_0$ 时，(3.5.9) 包含序列

$$\alpha(i,1),\alpha(i,2),\cdots,\alpha(i,r),\quad i=1,2,\cdots,q$$

的概率至少有

$$1-q(1-p^r)^m \geqslant 1-\varepsilon.$$

当该事件发生时，对每个 a_i，一定存在 x_{n+j+r} 有 $|x_{n+j+r}-a_i|<\varepsilon/2$. 于是对于每个 $x\in A$，从序列 $x_n,\cdots,x_{n+k}(n\geqslant n_0,k\geqslant k_0)$ 中可找到一点，使它与 x 的距离不超过 ε，这就是说 $A\subset N_\varepsilon(\{x_n,\cdots,x_{n+k}\})$. 结合 (3.5.4) 式，就完成了定理的证明. □

§ 3.6 Hutchinson 度量

设 $(X;d)$ 是紧度量空间，用 $\mathcal{M}$ 表示 X 上概率测度全体，即若 $\mu\in\mathcal{M}$，则 μ 是 M 上的测度，并且 $\mu(X)=1$. $\mathcal{M}$ 中的元素也常称为分布.

设 $\mu\in\mathcal{M}$，它的支撑 (support) 定义为

$$\mathrm{supp}\mu=\left\{x\in X\,\middle|\,\mu(O(x;\varepsilon))>0,\forall\varepsilon>0\right\},$$

其中 $O(x;\varepsilon)$ 表示以 x 为中心，半径为 ε 的开球. 显然 $\mathrm{supp}\mu$ 是 X 中的闭集，并且 $\mu(\mathrm{supp}\mu)=1$.

用 $C(X)$ 表示 $X \to \mathbb{R}$ 的连续函数全体，称 $f \in C(X)$是 Lipschitz 函数，如果存在常数 $M(f)$，使得

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M(f)d(x, y), \quad \forall x, y \in X. \tag{3.6.1}$$

这里 $M(f)$ 称为 f 的 Lip 常数，一般它将随 f 而变. 特别若 $M(f) = 1$，则记 $f \in \widetilde{Lip}\,1$.

定义 3.7. $\mathcal{M}$ 上的 Hutchinson 度量 d_H 定义为

$$d_H(\mu, \nu) \doteq \sup\left\{\int_X f\,\mathrm{d}\mu - \int_X f\,\mathrm{d}\nu \,\middle|\, f \in \widetilde{Lip}\,1\right\}, \quad \mu, \nu \in \mathcal{M}. \tag{3.6.2}$$

定理 3.14. d_H 是 $\mathcal{M}$ 上的距离.

证明 只要验证 d_H 满足距离的三个公理. 容易验证恒等公理和对称公理是满足的，因此只要证明三角形公理. 设 $\mu, \nu, \lambda \in \mathcal{M}$，任取 $f \in \widetilde{Lip}\,1$，有

$$\begin{aligned} d_H(\mu, \nu) + d_H(\nu, \lambda) &\geqslant \left|\int_X f\,\mathrm{d}\mu - \int_X f\,\mathrm{d}\nu\right| + \left|\int_X f\,\mathrm{d}\nu - \int_X f\,\mathrm{d}\lambda\right| \\ &\geqslant \left|\int_X f\,\mathrm{d}\mu - \int_X f\,\mathrm{d}\lambda\right|. \end{aligned}$$

于是

$$d_H(\mu, \nu) + d_H(\nu, \lambda) \geqslant \sup_{f \in \widetilde{Lip}\,1} \left\{\int_X f\,\mathrm{d}\mu - \int_X f\,\mathrm{d}\lambda\right\} = d_H(\mu, \lambda).$$

□

定理 3.15. $(\mathcal{M}; d_H)$ 是完备度量空间.

证明 设 $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $(\mathcal{M}; d_H)$ 中的一个柯西序列. 首先证明

对任意 $\phi(x)\in C(X)$，下面的极限存在，

$$\lim_{n\to\infty}\int_X \phi(x)\,\mathrm{d}\mu_n. \tag{3.6.3}$$

利用逼近论中的 Stone 定理可证明 Lipschitz 函数在 $C(X)$ 中是稠密的，因此对任给 $\varepsilon>0$，总存在 Lipschitz 函数 f，有 $\|f-\phi\|\doteq\sup\limits_{x\in X}|f(x)-\phi(x)|<\varepsilon$. 于是我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_X \phi\,\mathrm{d}\mu_n-\int_X \phi\,\mathrm{d}\mu_m\right|\\
&\leqslant\left|\int_X(\phi-f)\,\mathrm{d}\mu_n\right|+\left|\int_X(\phi-f)\,\mathrm{d}\mu_m\right|+\left|\int_X f\,\mathrm{d}\mu_n-\int_X f\,\mathrm{d}\mu_m\right|\\
&\leqslant 2\varepsilon+M(f)\left|\int_X\frac{f}{M(f)}\,\mathrm{d}\mu_n-\int_X\frac{f}{M(f)}\,\mathrm{d}\mu_m\right|\\
&\leqslant 2\varepsilon+M(f)d_H(\mu_m,\mu_n),
\end{aligned} \tag{3.6.4}$$

其中 $M(f)$ 是 f 的 Lip 常数，从而 $f/(M(f))\in\widetilde{Lip}\,1$.

由于 $\{\mu_n\}$ 是 $(\mathcal{M};d_H)$ 中的柯西序列，可见 $\left\{\int_X\phi\,\mathrm{d}\mu_n\right\}$ 也是一个柯西序列，这样就证明了 (3.6.3) 极限存在.

定义正线性泛函

$$\Lambda(\phi)=\lim_{n\to\infty}\int_X\phi\,\mathrm{d}\mu_n,\quad \phi\in C(X). \tag{3.6.5}$$

由 Riesz 定理知，存在 Borel 有限正测度 μ，满足

$$\Lambda(\phi)=\int_X\phi\,\mathrm{d}\mu,\quad \phi\in C(X). \tag{3.6.6}$$

由 (3.6.5) 可知 $\Lambda(1)=1$，因此 $\mu(X)=1$，即 $\mu\in\mathcal{M}$.

现在尚须证明

$$\mu_n \xrightarrow{d_H} \mu, \quad n\to\infty.$$

注意到

$$\begin{aligned} d_H(\mu_n,\mu) &= \sup_{f\in\widetilde{Lip}\,1}\left\{\int_X f\,\mathrm{d}\mu-\int_X f\,\mathrm{d}\mu_n\right\} \\ &= \sup_{f\in\widetilde{Lip}\,1}\lim_{m\to\infty}\left\{\int_X f\,\mathrm{d}\mu_m-\int_X f\,\mathrm{d}\mu_n\right\} \\ &\leqslant \overline{\lim_{m\to\infty}}\sup_{f\in\widetilde{Lip}\,1}\left\{\int_X f\,\mathrm{d}\mu_m-\int_X f\,\mathrm{d}\mu_n\right\} \\ &= \overline{\lim_{m\to\infty}}\, d_H(\mu_m,\mu_n), \end{aligned}$$

可见当 $n\to\infty$ 时有

$$d_H(\mu_n,\mu)\to 0.$$

□

现在回过来继续讨论迭代函数系．设 $\{X;\mathbf{p};f_1,\cdots,f_N\}$ 是带概率的迭代函数系，它的马尔可夫算子 (Markov operator) $M:\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ 定义为

$$M\mu=\sum_{i=1}^{N}p_i\mu\circ f_i^{-1},\quad \mu\in\mathcal{M}. \tag{3.6.7}$$

引理 3.6. 若 $g: X \to \mathbb{R}$ 是连续函数 (或简单函数)，$\mu \in \mathcal{M}$，则

$$\int_X g\,\mathrm{d}(M\mu) = \sum_{i=1}^{N} p_i \int_X g \circ f_i\,\mathrm{d}\mu. \tag{3.6.8}$$

证明 设 $B \subset X$，令 χ_B 表示 B 的特征函数，即

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B, \\ 0, & x \overline{\in} B. \end{cases}$$

由计算可得

$$\begin{aligned} \int_X \chi_B\,\mathrm{d}(M\mu) &= \sum_{i=1}^{N} p_i \int_X \chi_B\,\mathrm{d}(\mu \circ f_i^{-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{N} p_i \int_B \mathrm{d}(\mu \circ f_i^{-1}) = \sum_{i=1}^{N} p_i \mu(f_i^{-1}(B)). \end{aligned}$$

另一方面，

$$\sum_{i=1}^{N} p_i \int_X \chi_B \circ f_i\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{N} p_i \int_{f_i^{-1}(B)} \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{N} p_i \mu(f_i^{-1}(B)).$$

因而对于特征函数 χ_B，等式 (3.6.8) 成立．从而对于特征函数的线性组合 (称为简单函数)，等式 (3.6.8) 也必然成立．又由函数论知道，任何连续函数一定存在一个简单函数列一致收敛于它，于是可以证明对连续函数，(3.6.8) 也成立． □

定理 3.16. 设 $(X; d)$ 是紧度量空间，$\{X; \mathbf{p}; f_1, \cdots, f_N\}$ 是双曲 IFSP，$s \in (0,1)$ 是 IFSP 的压缩因子．又设 $M: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是该 IFSP 的马尔可夫算子，则 M 是空间 $(\mathcal{M}; d_H)$ 上的压缩映射，且压缩因子也是 s，即

$$d_H(M\mu, M\nu) \leqslant s d_H(\mu, \nu), \quad \forall \mu, \nu \in \mathcal{M}, \tag{3.6.9}$$

又存在惟一测度 $\mu_* \in \mathcal{M}$，满足

$$M\mu_* = \mu_*. \tag{3.6.10}$$

证明 设 $g \in \widetilde{Lip}\,1$，$\mu,\nu \in \mathcal{M}$，由 (3.6.8) 有

$$\begin{aligned}&\int_X g\,\mathrm{d}(M\mu) - \int_X g\,\mathrm{d}(M\nu)\\&\qquad= \sum_{i=1}^N p_i \left(\int_X g(f_i(x))\,\mathrm{d}\mu - \int_X g(f_i(x))\,\mathrm{d}\nu \right).\end{aligned}$$

注意到

$$|g(f_i(x)) - g(f_i(y))| \leqslant d(f_i(x), f_i(y)) \leqslant sd(x,y), \quad \forall x, y \in X,$$

因此

$$\frac{g(f_i)}{s} \in \widetilde{Lip}\,1,$$

这样有

$$\begin{aligned}\left| \int_X g\,\mathrm{d}(M\mu) - \int_X g\,\mathrm{d}(M\nu) \right| &\leqslant \sum_{i=1}^N p_i \cdot s \cdot d_H(\mu,\nu)\\&= s \cdot d_H(\mu,\nu).\end{aligned}$$

于是立即可得

$$d_H(M\mu, M\nu) \leqslant s d_H(\mu,\nu).$$

这就证明了马尔可夫算子 M 是 $(\mathcal{M}; d_H)$ 上的压缩映射，压缩因子是 s. 由定理 3.15 知 $(\mathcal{M}; d_H)$ 是完备度量空间，利用 Banach 不动点定理，必存在惟一的 $\mu_* \in \mathcal{M}$，有 $M\mu_* = \mu_*$. □

定理中的概率测度 μ_* 称为 IFSP 的不变测度，它还有一个重要的性质 (证明从略) 就是它的支撑集就是 IFS 的吸引子，即

$$\mathrm{supp}\mu_* = A. \tag{3.6.11}$$

设测度序列 $\{\mu_n\} \subset \mathcal{M}$ 和 $\mu \in \mathcal{M}$，我们称 $\{\mu_n\}$ 弱收敛到 μ，如果下面等式成立：

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f\,\mathrm{d}\mu_n = \int_X f\,\mathrm{d}\mu, \quad \forall f \in C(X),$$

简单记为

$$\mu_n \xrightarrow{\text{弱}} \mu, \quad n \to \infty.$$

现在假设 $\mu_n \xrightarrow{d_H} \mu$，如果在 (3.6.4) 式中，令 $\mu_n = \mu$，可容易证得 $\mu_n \xrightarrow{\text{弱}} \mu$. 这就是说在 $\mathcal{M}$ 中，度量 d_H 收敛序列一定是弱收敛的.

现任取 $\mu_0 \in \mathcal{M}$，作迭代 $M^n\mu_0$，由定理 3.16 知

$$M^n\mu_0 \xrightarrow{d_H} \mu_*,$$

因此

$$M^n\mu_0 \xrightarrow{\text{弱}} \mu_*,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f\,\mathrm{d}(M^n\mu_0) = \int_X f\,\mathrm{d}\mu_*, \quad f \in C(X). \tag{3.6.12}$$

例 3.3. 令 $X=[0,1], f_1(x)=x/3, f_2(x)=x/3+2/3, p_1=p_2=1/2$，它们构成一个带概率的双曲迭代函数系．它的吸引子就是熟知的 Cantor 三分集 C．又设 μ_* 是其相应的不变测度．由 (3.6.11) 知 $\text{supp}\mu_*=C$，因此有 $\mu_*(C)=1$．但对于勒贝格测度 $\mathcal{L}^1$ 有 $\mathcal{L}^1(C)=0$.

用 δ_x 表示 Dirac 测度，它的定义是:

$$\delta_x(A)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in A,\\ 0, & \text{当 } x\overline{\in} A.\end{cases}$$

现在取 $\mu_0=\delta_0$，计算可得

$$\begin{aligned}\mu_1=M\mu_0 &= \frac{1}{2}(\delta_0\circ f_1^{-1}+\delta_0\circ f_2^{-1})=\frac{1}{2}(\delta_0+\delta_{2/3}),\\ \mu_2=M^2\mu_0 &= M\mu_1=\frac{1}{2}(\mu_1\circ f_1^{-1}+\mu_1\circ f_2^{-1})\\ &= \frac{1}{2^2}(\delta_0\circ f_1^{-1}+\delta_{2/3}\circ f_1^{-1}+\delta_0\circ f_2^{-1}+\delta_{2/3}\circ f_2^{-1})\\ &= \frac{1}{2^2}(\delta_0+\delta_{2/9}+\delta_{2/3}+\delta_{8/9}),\end{aligned}$$

一般地，由归纳可得

$$\mu_n=\frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n}\delta_{c_i},$$

其中 c_i 是集 C_n (见 (1.3.2) 式)中的 2^n 个基本区间的左端点.

若 $f\in C[0,1]$，则由 (3.6.12) 可得

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\mu_*=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n}f(c_i).$$

§ 3.7 随机算法

设 $\{\mathbb{R}^2; f_n, n = 1, 2, \cdots, N\}$ 是平面上的一个双曲迭代函数系，其吸引子为 A. 由定理 3.8 知，为求得吸引子 A，只要采用如下步骤：首先任取 $\mathbb{R}^2$ 中的一个非空紧集 A_0 (例如三角形、正方形，也可以取一个定点 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$)，作迭代

$$A_{k+1} = \bigcup_{n=1}^{N} f_n(A_k), \quad k = 0, 1, 2, \cdots,$$

则序列 $\{A_k\}$ 在 Hausdorff 度量下将收敛于 A. 于是要在计算机屏幕上作出 A 的图象，我们可这样进行：

1° 初始化. 输入任选初始图形 A_0，并设定最大迭代步数；

2° 计算出 $A_1 = \bigcup_{n=1}^{N} f_n(A_0)$；

3° 抹去屏幕上的集合 A_0，输出点集 A_1；

4° 返回到第二步，计算出 $A_2 = \bigcup_{n=1}^{N} f_n(A_1)$；

5° 抹去屏幕上的集合 A_1，输出点集 A_2.

当迭代达到最大步数才停止. 在实际操作中，要注意观察，当第 k 步得到的图形 A_k 与下一步得到的图形 A_{k+1} 十分接近时，就可以把 A_k 作为最终图形.

这种求 IFS 吸引子的方法简单明了，易于掌握，通常称为确定性算法. 但在实际应用中，随着迭代步数的增加，其计算量将快速增长，所以执行起来比较费时. 为此一般采用下面的随机算法比较好.

对给定的双曲迭代函数系 $\{\mathbb{R}^2; f_1, \cdots, f_N\}$，可以根据定理 3.13 用随机迭代法，同样可求得它的吸引子. 方法是这样的：先选

取概率向量 $\mathbf{p}=\{p_1, p_2, \cdots, p_N\}$，又任取 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$，并逐次独立地取

$$\mathbf{x}_n \in \{f_1(\mathbf{x}_{n-1}), f_2(\mathbf{x}_{n-1}), \cdots, f_N(\mathbf{x}_{n-1})\}, \quad n=1,2,\cdots,$$

其中事件 $\mathbf{x}_n = f_i(\mathbf{x}_{n-1})$ 发生的概率是 p_i. 这样得到一条轨迹 $\{\mathbf{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$，该轨迹将逼近 IFS 的吸引子.

具体步骤如下:

1° 取初始点 $\mathbf{x}_0$ (例如 $(0,0)$)，及总的迭代步数;

2° 以概率 $p_i(i=1,2,\cdots,N)$ 选取变换 f_i;

3° 把 f_i 作用到 $\mathbf{x}_0$ 上，得新点，记 $\mathbf{newx}=f_i(\mathbf{x}_0)$;

4° 令 $\mathbf{x}_0=\mathbf{newx}$;

5° 重返 2°，进行下一次迭代. 当迭代次数大于某预先给定的数 (例如 300) 时，开始在屏幕上打出点. 直到迭代大于总步数为止.

在实用上，往往取 $\{f_i\}$ 为平面上的一组仿射变换，对于 $\mathbf{x}=(x,y)^{\mathrm{T}}$，令

$$f_i(\mathbf{x})=\mathbf{B}_i\mathbf{x}+\mathbf{t}_i, \quad i=1,2,\cdots,N,$$

其中

$$\mathbf{B}_i=\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}_i=\begin{pmatrix} e_i \\ g_i \end{pmatrix}.$$

设 A 是其吸引子，则有

$$A=\bigcup_{i=1}^{N} f_i(A).$$

注意到

$$|\det \mathbf{B}_i| = \frac{S(f_i(K))}{S(K)},$$

其中 $\det \mathbf{B}_i$ 表示 $\mathbf{B}_i$ 的行列式，$S(A)$，$S(f_i(A))$ 分别表示图形 A 及 $f_i(A)$ 的面积．由此可见，若 $|\det \mathbf{B}_i|$ 值较大，反映了 $f_i(A)$ 在 A 中占有较多的份额，因此在选择迭代函数时，f_i 应有较大的概率被选中．为此，在随机迭代算法中的概率向量，常用下面的式子来确定：

$$p_i = \frac{|\det \mathbf{B}_i|}{\sum_{i=1}^{N} |\det \mathbf{B}_i|} = \frac{|a_i d_i - b_i c_i|}{\sum_{i=1}^{N} |a_i d_i - b_i c_i|}, \quad i = 1, 2, \cdots, N.$$

如果对于某个 i，$|\det \mathbf{B}_i| = 0$，则可以赋以 p_i 一个很小的正值．

数据 $\{a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, g_i, p_i\}$ 成为一组 IFSP 码，下面是蕨类植物叶片的一组 IFSP 码．对应的随机迭代算法结果见图 3.3.

表 3.1 蕨类植物叶子的 IFSP 编码

	a	b	c	d	e	g	p
f_1	0	0	0	0.16	0	0	0.01
f_2	0.85	0.04	-0.04	0.85	0	1.6	0.85
f_3	0.2	-0.26	0.23	0.22	0	1.6	0.07
f_4	-0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	0.07



图 3.3 随机迭代算法结果

附：随机迭代的源程序 (用 VC++ 6.0 编写)

```
IFSP()
{
  double a[4]={0,0.85,0.2,-0.15};
  double b[4]={0,0.04,-0.26,0.28};
  double c[4]={0,-0.04,0.23,0.26};
  double d[4]={0.16,0.85,0.22,0.24};
  double e[4]={0,0,0,0};
  double g[4]={0,1.6,1.6,0.44};
  double p[4]={0.01,0.85,0.07,0.07};
  CClientDC dc(this);
  double x,y,newx,newy,rn,total;
  int dx,dy;
  for(int i=0;i<20000;i++)
  {
    int k=0;
    rn=rand()/32767.0;
```

```
        total=p[0];
        while(total < rn)
        {
            k++;
            total+=p[k];
        }
        newx=a[k]*x+b[k]*y+e[k];
        newy=c[k]*x+d[k]*y+g[k];
        x=newx;
        y=newy;
        if(i>200)
        {
            dx=(int)(x*50+300);
            dy=(int)(600-y*50);
            dc.SetPixel(dx,dy,RGB(0,0,0));
        }
    }
}
```

从理论上来讲，IFS 吸引子与概率向量 p 的选择无关．但在实际绘图时，概率起到很重要的作用，控制概率，就是控制拼贴图形各部分落点的密度，使图形在有限步迭代终止时，显示出浓淡虚实的不同层次，而这恰好能跟真实的自然景物更贴近些．

下面我们介绍一个与 IFSP 相关的 Elton 遍历定理．为此首先要了解码空间 Ω 的定义，码空间在本书第六章中还将会遇到．码空间 Ω 中的元素是用 $\{1,2,\cdots,N\}$ 中的数所组成的半无穷序列，就是说元素 $\omega\in\Omega$，当且仅当

$$\omega=(i_1,i_2,\cdots,i_n,\cdots),\quad i_n\in\{1,2,\cdots,N\}.$$

下面规定用 ω_n 表示 ω 的第 n 个坐标的数，即 $\omega_n=i_n$．在 Ω 中引入度量

$$|\omega-\tilde{\omega}|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|i_n-\tilde{i}_n|}{(N+1)^n},\quad \omega,\tilde{\omega}\in\Omega,$$

这样 Ω 成为一个紧度量空间．

集 $\Pi=\left\{\omega\in\Omega\middle|\omega_l=i_l,n\leqslant l<n+k\right\}$ 称为 Ω 中的方体．

设给定了概率向量 $\mathbf{p}=\{p_1,p_2,\cdots,p_N\}$，那么可以在方体 Π 上定义测度 ρ:

$$\rho(\Pi)=\prod_{l=n}^{n+k-1}p_{i_l},$$

并由此，可以将它扩张成 Ω 上的一个测度 ρ．

现在我们写出 Elton 的定理 (证明从略，请参看文献 [15])．

定理 3.17. 设 $\{X;\mathbf{p};f_n,n=1,\cdots,N\}$ 是带概率的双曲迭代函数系，μ_* 是它的不变测度．则对任意 $x_0\in X$，存在 $G_{x_0}\subset\Omega$，有 $\rho(G_{x_0})=1$，并且对每一个 $(i_1,i_2,\cdots)\in G_{x_0}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}f(x_k)=\int_X f\,\mathrm{d}\mu_*,\quad \forall f\in C(X),$$

其中 $x_k=f_{i_k}\circ f_{i_{k-1}}\circ\cdots\circ f_{i_1}(x_0)$． □

推论 3.3. 设 $B \subset X$ 是 Borel 子集，且 $\mu_*(\partial B)=0$ (∂B 表示 B 的边界). 则对任一 $(i_1, i_2, \cdots) \in G_{x_0}$，有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(B,n)}{n+1} = \mu_*(B),$$

其中 $N(B,n) \doteq$ 交集 $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \cap B$ 中的点数.

第四章　拼贴定理及其应用

在今天的信息社会里，信息量不断爆炸式地增长，因而信息的存储、管理和传输的任务十分艰巨．目前研究者们企图通过以下三个方面来解决问题：(1) 研制更大容量的存储设备；(2) 改进传统的图象和文件压缩方法，以提高编码效率；(3) 探索新的图象编码理论和技术．分形图象压缩理论和技术是一种新的而又十分有效的方法，在保证图象质量的前提下，可达到较高的压缩比．以 § 3.7 中蕨类植物叶片图为例来说明．它是黑白二值图象，设分辨率是 512×512，每个象素点用 1 bit 表示 (黑、白)，那末叶片图要用 $512 \times 512 \times 1 = 262144$ bit 表示，但我们只用了 4 个仿射变换去重构，仅需 $4 \times 6 = 24$ 个参数，若每个参数用 4×8 bit 表示，则保存这些参数仅需 $24 \times 32 = 768$ bit．根据图象压缩比定义得

$$\text{压缩比} = \frac{\text{原始图象的总bit数}}{\text{压缩后图象的总bit数}} = \frac{262144}{768} \doteq 341.$$

这比目前现有的任何图象压缩方法的压缩比要高得多．可见分形编码在高压缩比的图象压缩技术上很有潜力．

分形图象压缩的理论基础是迭代函数理论，1989 年 A. Jacquin 的博士论文做了突破性的工作 (计算机自动确定仿射变换算法)，引

起各国研究者的浓厚兴趣，分形压缩技术从而取得了长足发展．1992 年全球最大的软件开发商 Microsoft 公司运用了分形技术推出一个不同寻常的被称为 Microsoft Encarta 磁盘．在这张磁盘上竟然储存了大量的文字、图片、音响、动画、照片及图形，它含有一部地图册和一部字典，其中有 75 小时的音响，1000 个动画，800 张可供缩放的彩色地图及 7000 多高质量的照片，所有这些编码在不超过 600MB 的数据之中．Encarta 是基于分形图象压缩技术才取得这样成功的，因此 Barnsley 说“They are all fractals”．

本章将介绍分形图象压缩基本理论和方法．

§ 4.1 拼贴 (Collage) 定理

对一个给定的双曲迭代函数系 (IFS)，可用计算机来生成它的吸引子，从而可得到许多漂亮的分形图象，还可以用来逼真地描述自然界的一些东西 (如海岸线、山峰、树叶等)，人们对此产生了极大兴趣．然而更重要的是它的反问题，就是给你一幅图象，如何寻找适当的 IFS，使其吸引子就是 (或近似是) 该图象．一般来说这是个很困难的问题．下面将介绍的拼贴定理，它虽然十分简单，但从中可以得到启发，在解反问题过程中起到关键作用，它首先由 Barnsley 等人建立．

定理 4.1 (IFS 拼贴定理)． 设 $\{X; f_1, \cdots, f_N\}$ 是一个双曲迭代函数系，压缩因子 $s < 1$，A 是它的吸引子，又 $E \in \mathcal{H}(X)$ 是任

意给定的集合，则有

$$h(A,E) \leqslant \frac{1}{1-s} h\Big(E, \bigcup_{i=1}^{N} f_i(E)\Big). \tag{4.1.1}$$

证明 利用 Hausdorff 距离 h 满足三角形不等式及 (3.3.3) 式，有

$$\begin{aligned} h(A,E) &\leqslant h\left(E, \bigcup_{i=1}^{N} f_i(E)\right) + h\left(\bigcup_{i=1}^{N} f_i(E), A\right) \\ &= h\left(E, \bigcup_{i=1}^{N} f_i(E)\right) + h\left(\bigcup_{i=1}^{N} f_i(E), \bigcup_{i=1}^{N} f_i(A)\right) \\ &\leqslant h\left(E, \bigcup_{i=1}^{N} f_i(E)\right) + sh(E,A), \end{aligned}$$

这样可得 (4.1.1). □

推论 4.1. 设 $E \in \mathcal{H}(X)$，$\varepsilon > 0$ 是任意给定的常数，则存在双曲迭代函数系 $\{X; f_1, \cdots, f_N\}$，有

$$h(A,E) < \varepsilon,$$

其中 A 是该迭代函数系的吸引子.

证明 由 $E \in \mathcal{H}(X)$ 是紧集，可知存在球族 $B_1, \cdots, B_m$，其球心都在 E 上，半径都不超过 $\varepsilon/4$，使得

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_i \subset N_{\varepsilon/4}(E). \tag{4.1.2}$$

构造压缩映射 $f_i : E \to B_i \ (i = 1, 2, \cdots, m)$，压缩比 $s_i < 1/2$. 这样有

$$f_i(E) \subset B_i \subset N_{\varepsilon/2}(f_i(E)). \tag{4.1.3}$$

由 (4.1.2) 及 (4.1.3)，可得

$$\bigcup_{i=1}^{m} f_i(E) \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_i \subset N_{\varepsilon/4}(E). \tag{4.1.4}$$

且

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_i \subset \bigcup_{i=1}^{m} N_{\varepsilon/2}\left(f_i(E)\right) \subset N_{\varepsilon/2}\left(\bigcup_{i=1}^{m} f_i(E)\right). \tag{4.1.5}$$

由 (4.1.4) 及 (4.1.5)，根据定理 3.3，得

$$h\left(E, \bigcup_{i=1}^{m} f_i(E)\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

将其代入 (4.1.1) 式 (取 $s = 1/2$)，得

$$h(A, E) \leqslant \frac{1}{1 - 1/2} \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

例 4.1. 设 $f_1(x) = 0.5x - 0.1$，$f_2(x) = 0.41x + 0.5$ 构成双曲迭代函数系 $\{\mathbb{R}; f_1, f_2\}$，记它的吸引子为 A，试估计 $h([0,1], A)$ 有多大？

解 因为

$$f_1([0,1]) = [-0.1, 0.4], \quad f_2([0,1]) = [0.5, 0.91],$$

所以

$$(f_1 \cup f_2)([0,1]) = [-0.1, 0.4] \cup [0.5, 0.91].$$

通过计算可得

$$d\left([0,1], (f_1 \cup f_2)([0,1])\right) = 0.09,$$

$$d\left(\left(f_1 \cup f_2\right)([0,1]),[0,1]\right)=0.1,$$

因此

$$h\left([0,1],\left(f_1 \cup f_2\right)([0,1])\right)=0.1.$$

又 $s=\max\{0.5,0.41\}=0.5$，由拼贴定理得

$$h([0,1], A) \leqslant \frac{1}{1-0.5} h\left([0,1],\left(f_1 \cup f_2\right)([0,1])\right)=0.2.$$

□

定理 4.2 (IFSP 拼贴定理). 设 $\{X;\mathbf{p};f_1,\cdots,f_N\}$ 是带概率的双曲迭代函数系，$s\in(0,1)$ 是 IFS 的压缩因子，μ_* 是其不变测度，M 是该 IFSP 的 Markov 算子，设 $\nu\in\mathcal{M}$，则有

$$d_H(\nu,\mu_*) \leqslant \frac{1}{1-s} d_H(\nu, M\nu) \tag{4.1.6}$$

证明 证明方法完全类似于定理 4.1.

根据 Hutchinson 度量 d_H 的三角不等式及定理 3.16 的 (3.6.9) 和 (3.6.10) 式，可得

$$\begin{aligned}
d_H(\nu,\mu_*) &\leqslant d_H(\nu, M(\nu))+d_H(M(\nu),\mu_*)\\
&= d_H(\nu, M(\nu))+d_H(M(\nu), M(\mu_*))\\
&\leqslant d_H(\nu, M(\nu))+s d_H(\nu,\mu_*),
\end{aligned}$$

这样可以推出 (4.1.6) 式. □

由推论 4.1 可知，对预先给定的任意目标集，总可以选择到某双曲迭代函数系，使得它的吸引子能任意近似它. 但是随着近似精度要求的提高，就需要增加变换的个数，可能会变得很大，这样就

失去了实际应用的价值．因此应当寻找一些处理方法，能利用较少的变换求得到满意的结果．

Collage 原理告诉我们可以这样做：选择若干压缩的仿射变换，将目标集经这些变换后，得到各自的小"拷贝"，然后将这些小"拷贝"拼贴在一起(彼此间容许有重叠，但应尽可能减少重叠)，构造出的图象要求能与原目标集尽量地一致．下面举一个简单例子来说明．

例 4.2. 给定目标集 E，它是缺了一角的正方形(见图 4.1所示)，它的顶点坐标(从左下角顶点开始，逆时针方向)依次是：$(-2,-2)$, $(2,-2)$, $(2,1)$, $(0,1)$, $(1,2)$, $(-2,2)$.

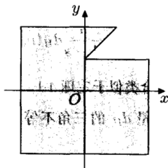


图 4.1 目标集 E

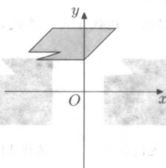
作四个仿射变换：

$$f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.25 \\ 0 & -0.25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1.5 \end{pmatrix},$$

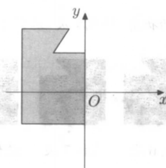
$$f_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0.5 \end{pmatrix},$$

$$f_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \end{pmatrix},$$

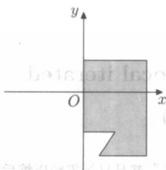
$$f_4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



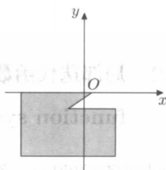
集 $f_1(E)$



集 $f_2(E)$



集 $f_3(E)$



集 $f_4(E)$

图 4.2 目标集的小拷贝

将它们分别作用到目标集上去，得到的小拷贝见图 4.2.

易见此时有 $E = \bigcup_{i=1}^{4} f_i(E)$. 利用确定性算法：在 E 中任取

一点作为起始点，逐次迭代，当迭代次数大于 10 时，图形已基本成形了 (见图 4.3).

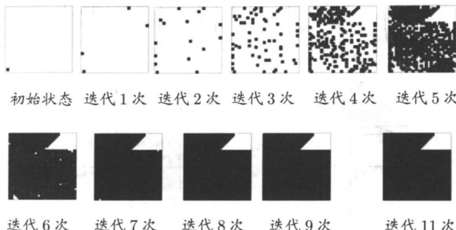


图 4.3 用确定性算法生成 IFS 的吸引子

§ 4.2 局部迭代函数系 (Local iterated function systems)

在拼贴定理的应用中，各小“拷贝”都是目标集经压缩后得到的. 再用这小“拷贝”去近似目标集中某个局部. 一般说来，目标集不具有“仿射自相似性”，因此这样的拼贴法往往是效果欠佳. 为了克服这个缺陷，需要引入局部迭代函数系 (Local iterated function systems，**简记为** LIFS).

定义 4.1. 设 $(X;d)$ 是紧度量空间. $(\mathcal{H}(X);h)$ 是对应的分形空

间. 设 $D \in \mathcal{H}(X)$, $f: D \to X, 0 \leqslant s < 1$, 若有

$$d(f(x), f(y)) \leqslant sd(x,y), \quad \forall x, y \in D,$$

则称 f 是 $(X;d)$ 上的局部压缩映射, s 是它的压缩因子, D 为其定义域.

定义 4.2. 设 $f_i(i=1,2,\cdots,N)$ 是紧度量空间 $(X;d)$ 上的局部压缩映射, 对应的定义域和压缩因子分别是 D_i 和 s_i, 它们构成一局部迭代函数系, 记为 $\{X; D_i; f_i, i=1,2,\cdots,N\}$. 定义 $\mathcal{H}(X)$ 上的算子:

$$f_{local}(B) = \bigcup_{i=1}^{N} f_i(D_i \cap B), \quad \forall B \in \mathcal{H}(X), \tag{4.2.1}$$

若有非空集 $A \subset X$, 使得 $f_{local}(A) = A$, 则称 A 是该局部迭代函数系的不变集或吸引子.

值得注意的是局部迭代函数系可以没有吸引子, 亦可以有若干不同的吸引子. 若 A 和 B 都是 f_{local} 的吸引子, 那么易见集合 $A \cup B$ 也是它的吸引子. 取所有吸引子的并集, 将是 f_{local} 的最大吸引子. 下面讨论这个最大吸引子如何来求.

定理 4.3. 设 $\{X; D_i; f_i, i=1,2,\cdots,N\}$ 是一个局部迭代函数系. 令

$$A_0 = X, \quad A_n = \bigcup_{i=1}^{N} f_i(D_i \cap A_{n-1}), \quad n = 1,2,\cdots,$$

则 $\{A_n\}$ 是一个单调递减集列. 记 $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$, 若 $A \neq \varnothing$, 则 A 是该 LIFS 的最大吸引子.

证明 首先注意到每个 f_i 的象集包含于 X，所以 $A_1 \subset X = A_0$．又若 $A_n \subset A_{n-1}$，则有

$$A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{N} f_i(D_i \cap A_n) \subset \bigcup_{i=1}^{N} f_i(D_i \cap A_{n-1}) = A_n.$$

于是由归纳可知 $\{A_n\}$ 是一个单调递减集列．记 $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$，则它是 $\{A_n\}$ 的极限集．

若 $A \neq \varnothing$．先证明 A 是 LIFS 的不变集．由 $A \subset A_n, \forall n$，因此

$$\bigcup_{i=1}^{N} f_i(D_i \cap A) \subset \bigcup_{i=1}^{N} f_i(D_i \cap A_n) = A_{n+1},$$

于是可得

$$\bigcup_{i=1}^{N} f_i(D_i \cap A) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = A. \tag{4.2.2}$$

现设 $x \in A$，则

$$x \in \bigcup_{i=1}^{N} f_i(D_i \cap A_n), \quad \forall n.$$

于是一定存在某个 $i_0 \in \{1, 2, \ldots, N\}$ 及递增的自然数列 $n_j(j = 1, 2, \ldots)$，满足条件

$$x \in f_{i_0}(D_{i_0} \cap A_{n_j}), \quad j = 1, 2, \cdots,$$

即存在 $x_{n_j} \in D_{i_0} \cap A_{n_j}$，有

$$x = f_{i_0}(x_{n_j}). \tag{4.2.3}$$

由 $\{A_n\}$ 的递减性，对每个固定的 n，当 j 足够大时，有

$$x_{n_j} \in A_n.$$

由于 $A_n \in \mathcal{H}(X)$ 是紧子集，因此一定存在 $\{x_{n_j}\}$ 的一个收敛子列，设其极限点为 x^*，则 $x^* \in A_n$. 因此 $x^* \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = A$. 同时由 D_{i_0} 是闭集，也有 $x^* \in D_{i_0}$. 由 f_{i_0} 的连续性，利用 (4.2.3) 式可得

$$x = f_{i_0}(x^*) \subset f_{i_0}(D_{i_0} \cap A) \subset \bigcup_{i=1}^{N} f_i(D_i \cap A). \tag{4.2.4}$$

由 (4.2.2) 及 (4.2.4) 两式可知，集合 A 是 LIFS 的吸引子.

接下去证明 A 是最大的吸引子. 设 $B \subset X$ 是另外一个吸引子，即 $B = \bigcup_{i=1}^{N} f_i(D_i \cap B)$. 显然有

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{N} f_i(D_i \cap X) = A_1.$$

依此类推，可得 $B \subset A_2, \cdots, B \subset A_n, \cdots$. 最终可得

$$B \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = A.$$

□

§ 4.3 LIFS 拼贴方法

不妨假设 $X = [0,1] \times [0,1], G \subset X$ 是一帧黑白图象，剖分 X 成一些较小的正方形 (见图 4.4 中左图). 假定有 N 个小正方形 $R_i (1 \leqslant i \leqslant N)$ 与 G 相交不空.

又设 $D_i \subset X (i = 1, 2, \cdots, N)$ 是另外较大的正方形，它们可以重叠 (见图 4.4 中右图). 以 D_i 为定义域块 (或称父块)，R_i 为值域

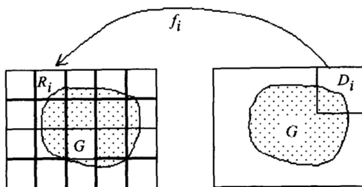


图 4.4　局部 IFS

块 (或称子块)，做压缩变换 f_i，满足条件

$$f_i(D_i) = R_i, \tag{4.3.1}$$

且使得

$$f_i(D_i \cap G) \approx R_i \cap G. \tag{4.3.2}$$

(4.3.2) 中近似等式的意义，具体讲就是在 Hausdorff 度量下误差足够小，即

$$h\,(f_i(D_i \cap G), R_i \cap G) < \varepsilon,$$

这样可得

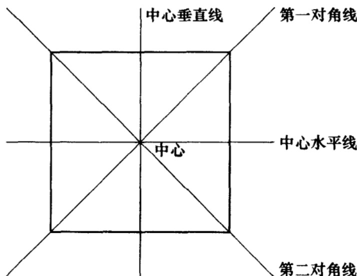
$$\bigcup_{i=1}^{N} f_i(D_i \cap G) \approx \bigcup_{i=1}^{N} (R_i \cap G) = G.$$

从上面等式可知，通过对 f_{local} 算子用迭代方法，求其吸引子，就可用来近似地恢复原来的图象．

在实际应用中，常取 D_i 的尺寸是 R_i 的两倍，因此压缩因子是 1/2．变换 f_i 采用如下形式的仿射变换：

$$f_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}A\mathbf{x} + \mathbf{t}, \tag{4.3.3}$$

其中 A 取下面八种矩阵之一：



(0) 恒等变换 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(1) 以中心垂直线为轴翻转 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(2) 以中心水平线为轴翻转 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(3) 以中心点为轴心逆时针旋转 180° $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(4) 以第一对角线为轴翻转 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(5) 以中心点为轴心逆时针旋转 90° $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(6) 以中心点为轴心逆时针旋转 270° $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

(7) 以第二对角线为轴翻转 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

例 4.3. 给定目标集 G (图 4.5)，构造对应的局部迭代函数系.

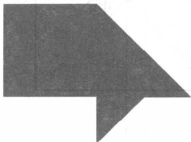


图 4.5

1° 引入大小相同的方块区域 $R_1, R_2, \cdots, R_8$ 将 G 完全覆盖，这些区域内部不交 (图 4.6).

2° 引入一组方块 D_1, D_2, D_3，保证都能与 G 相交不空，且这些方块的边长取作值域块边长的 2 倍(图 4.7).

3° 对每个 R_i 选择相应的 D_i，同时选择变换 f_i，使得

$$h\left(f_i(D_i \cap G), R_i \cap G\right)$$

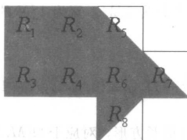


图 4.6 值域块 $\{R_i\}$

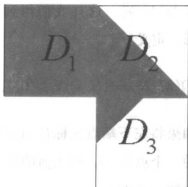


图 4.7 定义域块 $\{D_i\}$

尽可能小. 在本例中矩阵 A 的取法如下 (A_i 表示 8 种矩阵中第 i 种):

$$D_1 \xrightarrow{A_0} R_1, R_2, R_3, R_4, R_6;$$

$$D_2 \xrightarrow{A_0} R_5, R_7;$$

$$D_2 \xrightarrow{A_6} R_8.$$

显然此时有 $f_{local}(G) = G$.

4° 选定适当坐标系, 确定局部 IFS 码.

5° 用迭代法生成图象.

§ 4.4 离散局部迭代函数系(Discretely local iterated function systems)

给定两个正整数 M, N. 把单位正方形 $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ 分成

N 行 M 列，这样我们得到 MN 个长为 $1/M$，宽为 $1/N$ 的长方形．定义

$$\Omega(M,N)=\{(i,j)|\, i\in\{0,1,\ldots,M-1\},\ j\in\{0,1,\ldots,N-1\}\},$$

如果将左下端点坐标是 $(i/M,j/N)$ 的长方形，对应于 $\Omega(M,N)$ 中的一个点 (i,j)，则上面的每一个长方形都惟一对应于集合 $\Omega(M,N)$ 中的一个点．

任取集合 $A\subset\mathbb{R}^2$，记 $\mathcal{F}(A)$ 为定义在 A 上的实值函数的全体所组成的集合．对于任给的 $f,g\in\mathcal{F}(A)$，它们之间的距离定义为

$$d_\infty(f,g)=\sup\{|f(\mathbf{x})-g(\mathbf{x})|\mid \mathbf{x}\in A\}.$$

定理 4.4. 设 A 是 $\mathbb{R}^2$ 的非空子集，则空间 $(\mathcal{F}(A);d_\infty)$ 是一个完备度量空间．

证明 设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是空间 $(\mathcal{F}(A);d_\infty)$ 中的一个柯西序列．任取 $\varepsilon>0$，必存在自然数 $G(\varepsilon)$，当 $m,n>G(\varepsilon)$ 时，有

$$d_\infty(f_m,f_n)<\varepsilon.$$

于是对任意的 $\mathbf{x}\in A$，由 d_∞ 的定义，可知当 $m,n>G(\varepsilon)$ 时，有

$$|f_m(\mathbf{x})-f_n(\mathbf{x})|<\varepsilon. \tag{4.4.1}$$

所以 $\{f_n(\mathbf{x})\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个柯西序列．根据实数的完备性，存在 $p(\mathbf{x})\in\mathbb{R}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(\mathbf{x})=p(\mathbf{x})$．这样我们得到了 $\mathcal{F}(A)$ 中的一个函数 p．

在 (4.4.1) 式中令 $m \to \infty$，可得当 $n > G(\varepsilon)$ 时，对所有 $\mathbf{x} \in A$，

$$|p(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| \leqslant \varepsilon,$$

从而

$$d_\infty(f_n, p) = \sup\{|f_n(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x})| \mid \mathbf{x} \in A\} \leqslant \varepsilon.$$

这说明函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在度量 d_∞ 下收敛到 p. □

特别地，我们将 $\mathcal{F}(\Omega(M,N))$ 简记为 $\mathcal{F}(M,N)$. 由定理 4.4 可知，$(\mathcal{F}(M,N); d_\infty)$ 是一个完备度量空间.

设 $A_{ij} \subset I^2$ 是对应于点 $(i,j) \in \Omega(M,N)$ 的一个长方形，即

$$A_{ij} = \left\{(x,y) \middle| (x,y) \in \left[\frac{i}{M}, \frac{i+1}{M}\right] \times \left[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}\right]\right\}.$$

设 $I^2 = \bigcup_{t=1}^{k} R_t^0$，其中每个 R_t^0 都是由若干个 A_{ij} 组成的长方形，且 $\{R_t^0\}$ 彼此间内部互不相交，我们称 $\{R_t^0\}$ 为值域块 (子块). 对于每个 $t = 1, 2, \ldots, k$，设 $D_t^0 \subset I^2$ 也是由若干个 A_{ij} 组成的长方形，且 D_t^0 的长与宽都是 R_t^0 的两倍，我们称 D_t^0 为定义域块 (父块). 注意到 $\{D_t^0\}$ 的内部可能相交，甚至对于 $t_1 \neq t_2$，$D_{t_1}^0$ 与 $D_{t_2}^0$ 可能相同.

对于 $t = 1, 2, \ldots, k$，记

$$R_t = \{(i,j) | A_{ij} \subset R_t^0\}, \quad D_t = \{(i,j) | A_{ij} \subset D_t^0\},$$

则 $\Omega(M,N) = \bigcup_{t=1}^{k} R_t$ 且 $\{R_t\}$ 互不相交.

对于 $t = 1, 2, \ldots, k$，设 $\phi_t: \mathcal{F}(D_t) \to \mathcal{F}(R_t)$ 是一个压缩映射，即 $\exists 0 \leqslant s_t < 1$，使得 $\forall f, g \in \mathcal{F}(D_t)$，有

$$d_\infty(\phi_t(f), \phi_t(g)) \leqslant s_t d_\infty(f, g).$$

我们可由 $\{\phi_t\}_{t=1}^k$ 定义一个 $(\mathcal{F}(M,N);d_\infty)$ 上的映射 ϕ: $\forall f \in \mathcal{F}(M,N)$，令

$$\phi(f)(i,j) = \phi_t(f|_{D_t})(i,j), \quad (i,j) \in R_t, \tag{4.4.2}$$

其中 $f|_{D_t}$ 表示函数 f 在 D_t 上的限制，即 $f|_{D_t}$ 是从 D_t 到 $\mathbb{R}$ 的函数，且对于任意 $\mathbf{x} \in D_t$，有 $f|_{D_t}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$. 我们记 $\phi = \bigcup_{t=1}^k \phi_t$.

注意到对于任意 $f,g \in \mathcal{F}(M,N)$，有

$$\begin{aligned}
d_\infty(\phi(f),\phi(g)) &= \sup\left\{|\phi(f)(i,j) - \phi(g)(i,j)| \,\middle|\, (i,j) \in \Omega(M,N)\right\} \\
&= \sup\left\{|\phi_t(f|_{D_t})(i,j) - \phi_t(g|_{D_t})(i,j)| \,\middle|\, (i,j) \in R_t, \right. \\
&\qquad\qquad \left. t = 1,2,\dots,k\right\} \\
&\leqslant \max\left\{s_t d_\infty(f|_{D_t}, g|_{D_t}) \,\middle|\, t = 1,2,\dots,k\right\} \\
&\leqslant \max\left\{s_t d_\infty(f,g) \,\middle|\, t = 1,2,\dots,k\right\} \\
&= \max_{1\leqslant t\leqslant k} s_t \cdot d_\infty(f,g).
\end{aligned}$$

于是我们有如下定理:

定理 4.5. 设 ϕ_t: $\mathcal{F}(D_t) \to \mathcal{F}(R_t)$ 为压缩映射，压缩因子为 s_t，$t = 1,2,\dots,k$. 记 $s = \max_{1\leqslant t\leqslant k} s_t$. 令 $\phi = \bigcup_{t=1}^k \phi_t$ 是由 (4.4.2) 定义的映射，则 ϕ 是完备度量空间 $(\mathcal{F}(M,N);d_\infty)$ 上的压缩映射，且其压缩因子为 s. □

在实用中，我们令 R_t 为具有下列形式的集合:

$$R_t = \{i_t, i_t+1, \dots, i_t+r_t-1\} \times \{j_t, j_t+1, \dots, j_t+r_t-1\}.$$

因为 D_t^0 的长和宽都是 R_t^0 的两倍，所以存在 (i'_t, j'_t)，使得

$$D_t = \{i'_t, i'_t+1, \dots, i'_t+2r_t-1\} \times \{j'_t, j'_t+1, \dots, j'_t+2r_t-1\}.$$

当 R_t 和 D_t 确定时，我们采用如下形式的 ϕ_t:

第一步. 对于任意 $f \in \mathcal{F}(D_t)$，我们定义 $\varphi(f) \in \mathcal{F}(R_t)$ 为

$$\varphi(f)(i,j) = \frac{1}{4}[f(i',j') + f(i'+1,j') + f(i',j'+1) + f(i'+1,j'+1)], \quad (i,j) \in R_t, \quad (4.4.3)$$

其中 $(i',j') = (i'_t + 2(i-i_t), j'_t + 2(j-j_t))$.

第二步. 将 $\varphi(f)$ 按照 §4.3 的八种方法之一变换成一个新的函数 $U_t(f)$. 称 U_t 为函数 f 的空间变换. 例如，对于以中心垂直线为轴翻转的变换，

$$U_t(f)(i,j) = \varphi(f)(r_t - 1 - (i-i_t) + i_t, j);$$

对于以第一对角线为轴翻转的变换，

$$U_t(f)(i,j) = \varphi(f)(i_t + (j-j_t), j_t + (i-i_t)).$$

第三步. 通过一个压缩映射将 $U_t(f)$ 变换为 $\phi_t(f)$:

$$\phi_t(f)(i,j) = s_t U_t(f)(i,j) + o_t, \quad (4.4.4)$$

其中 $0 \leqslant s_t < 1$，$o_t \in \mathbb{R}$. 我们称 ϕ_t 为灰度变换，并称 s_t 和 o_t 分别为灰度变换的对比度和亮度.

易见，对任意 $f, g \in \mathcal{F}(D_t)$，有

$$d_\infty(\phi_t(f), \phi_t(g)) \leqslant s_t d_\infty(f,g).$$

于是当 D_t, R_t 和 ϕ_t 给定之后，存在惟一的 $f \in \mathcal{F}(M,N)$，使得

$$\bigcup_{t=1}^{k} \phi_t(f) = f.$$

我们称这样的 $\{\mathcal{F}(M,N); D_t, R_t, \phi_t, t = 1,2,\dots,k\}$ 为离散局部迭代函数系 (Discretely local iterated function systems，简记为 DLIFS).

注意到平面上一帧分辨率为 $M \times N$ 的图象可对应于一个函数 $f \in \mathcal{F}(M,N)$，所以我们可以利用离散局部迭代函数系进行图象压缩．其编码过程如下进行．对于给定的灰度图象 $f \in \mathcal{F}(M,N)$，将 $\Omega(M,N)$ 划分为若干子块 $\{R_t\}_{t=1}^{k}$，对每个子块 R_t，寻找父块 $D_t \in \Omega(M,N)$ 和压缩变换 ϕ_t：$\mathcal{F}(D_t) \to \mathcal{F}(R_t)$，使得

$$\phi_t(f|_{D_t}) \approx f|_{R_t},$$

其中近似等式的意思是指，使得 $d_\infty(\phi_t(f|_{D_t}), f|_{R_t})$ 尽可能小，从而使得

$$f = \bigcup_{t=1}^{k}(f|_{R_t}) \approx \bigcup_{t=1}^{k} \phi_t(f|_{D_t}) = \phi(f).$$

由于 ϕ 是完备度量空间 $(\mathcal{F}(M,N); d_\infty)$ 的压缩映射，利用迭代法，可求出 ϕ 的吸引子，该吸引子可近似视作原来的图象．

在具体执行过程中，当 R_t,D_t 及相应的空间变换 U_t 确定时，灰度变换中的 s_t 和 o_t 可用最小二乘法确定．

设子块 R_t 的各象素点上的灰度值分别是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots$, α_m $(m = r_t^2)$．对与 R_t 匹配的父块 D_t 经过缩小和旋转操作后，得到对应各象素点上的灰度值分别是 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ (这个操作对应于把

$f \in \mathcal{F}(D_t)$ 变为 $U_t(f) \in \mathcal{F}(R_t)$). 令

$$H = \sum_{j=1}^{m} (s\beta_j + o - \alpha_j)^2, \tag{4.4.5}$$

称 H 为匹配范数. 为了使匹配范数最小，利用最小二乘法，求 H 关于 s 和 o 的偏导数，并令其为零，即

$$\frac{\partial H}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial o} = 0.$$

可解得

$$s = \frac{m \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \beta_j - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \sum_{j=1}^{m} \beta_j}{m \sum_{j=1}^{m} \beta_j^2 - \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j \right)^2}, \tag{4.4.6}$$

$$o = \frac{1}{m} \left[\sum_{j=1}^{m} \alpha_j - s \sum_{j=1}^{m} \beta_j \right]. \tag{4.4.7}$$

它们就取作灰度变换中的 s_t 和 o_t.

将 (4.4.6) 与 (4.4.7) 代入 (4.4.5) 可得匹配范数

$$H = \frac{1}{m} \left[\sum_{j=1}^{m} \alpha_j^2 - s \left(s \cdot \sum_{j=1}^{m} \beta_j^2 - 2 \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \beta_j + 2o \sum_{j=1}^{m} \beta_j \right) + o \left(mo - 2 \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \right) \right]. \tag{4.4.8}$$

§4.5 实例

利用 §4.4 中 DLIFS 方法，对一幅 320 × 320 象素的汽车图象

(灰度图) 进行 DLIFS 编码.

一、具体步骤

1° 将灰度图分割成 20×20 幅 16×16 象素的区域，作为父块 D_t 的选择，将灰度图分割成 40×40 幅 8×8 象素的区域作为子块 R_t.

2° 对于每个 R_t 上的图象，从 20×20 个父块中寻找合适的父块 D_t 和相应的变换 U_t，对比度因子 s_t 及亮度 o_t. 具体做法是:

(1) 按 (4.4.3) 式的方法，将 D_t 上 16×16 象素的灰度图四点平均为一点，转换成 R_t 上 8×8 象素的灰度图.

(2) 用 § 4.3 中 8 种不同的变换方法变换平均后的灰度图，得到 8 幅 8×8 象素的灰度图. 对于 20×20 个不同的 D_t 上的图象，得到 $20 \times 20 \times 8$ 种不同的 8×8 象素的灰度图.

(3) 选定某子块 R_t，设 R_t 为各象素点的灰度值分别为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{64}$. 又设父块经平均及变换后的 8×8 象素的灰度图，对应的灰度值为 $\beta_1, \cdots, \beta_{64}$. 令

$$s_t = \frac{64\sum_{j=1}^{64}\alpha_j\beta_j - \sum_{j=1}^{64}\alpha_j\sum_{j=1}^{64}\beta_j}{64\sum_{j=1}^{64}\beta_j^2 - \left(\sum_{j=1}^{64}\beta_j\right)^2},$$

$$o_t = \frac{1}{64}\left[\sum_{j=1}^{64}\alpha_j - s_t\sum_{j=1}^{64}\beta_j\right].$$

计算

$$H = \frac{1}{64}\Bigg[\sum_{j=1}^{64}\alpha_j^2 - s_t\bigg(s_t \cdot \sum_{j=1}^{64}\beta_j^2 - 2\sum_{j=1}^{64}\alpha_j\beta_j$$

$$+2o_t\sum_{j=1}^{64}\beta_j\Big)+o_t\Big(64\,o_t-2\sum_{j=1}^{64}\alpha_j\Big)\Big].$$

对每一个 R_t，需经 $20\times20\times8$ 次运算，得到 $20\times20\times8$ 个 $\{s_t,o_t,H\}$ 值，找出其中使 H 取值最小的 s_t 和 o_t. 记录 s_t,o_t 的值和它对应的父块 D_t 及变换 U_t，这样就完成了对子块 R_t 上图象的编码，也就得到了变换 ϕ_t.

(4) 对 40×40 个 R_i 上图象都完成编码后，将其依次存入数据库.

3° 解码. 令 $f_0(i,j)\equiv0,\forall i,j$. 令 $\phi=\bigcup_{i=1}^{1600}\phi_i$，求

$$\phi(f_0),\quad \phi(\phi(f_0)),\quad \cdots,$$

直至连续两幅图象十分接近，一般迭代 7 ∽ 8 次就可以了.

二、运行结果



原始图象



恢复图象



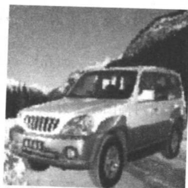
迭代 1 次



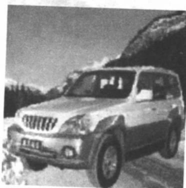
迭代 2 次



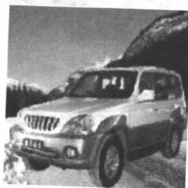
迭代 3 次



迭代 4 次



迭代 5 次



迭代 6 次

第五章　分形插值

给定平面上一组点列 $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{N}$，求一多项式 p，通过该点列. 或者给定一个函数 f，求一个多项式 p，使在给定的 $\{x_i\}_{i=0}^{N}$ 上插值于 $f(x)$，即使得 $p(x_i) = f(x_i)$ $(0 \leqslant i \leqslant N)$，这就是著名的拉格朗日插值法. 插值多项式在函数逼近论、数值分析的研究中、以及在数据拟合的应用中，都占有重要的地位.

样条函数是另一种强有力的插值工具，它具有优良的逼近性质和计算的稳定性，因而被广泛应用.

设 $x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N$ 是区间 $I = [x_0, x_N]$ 的一个分划，用 P_k 表示次数不超过 k 的多项式全体. 定义 I 上的连续函数 S:

$$\begin{cases} S(x) = p_{i-1}(x) \in P_k, \quad x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i, \\ p_{i-1}(x_{i-1}) = y_{i-1}, \\ p_{i-1}(x_i) = y_i, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, N.$$

显然 S 是一个分段为 k 次多项式的连续函数，它通过给定点列 $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{N}$，S 就是一个 k 次多项式样条.

现在将上述的 S 用另一种方式来表述．记 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$，令

$$L_i(x) = x_{i-1} + \frac{x_i - x_{i-1}}{x_N - x_0}(x - x_0),$$

显然 $L_i : I \to I_i$．又记

$$\omega_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_i(x) \\ p_{i-1}(L_i(x)) \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

由 $\{\omega_i\}$ 构成一个迭代函数系，若记 S 的图象为 $G = \{(x, S(x) \mid x \in I)\}$，容易验证 G 将是 $\{\omega_i\}$ 的一个不变集，即 $G = \bigcup_{i=1}^{N} \omega_i(G)$．

如果将上面的 ω_i 推广至一般的形式：

$$\omega_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_i(x) \\ F_i(x, y) \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

那么这种类型的迭代函数系可产生本章将阐述的对象 —— 分形插值函数 (Fractal interpolation functions，简记为 FIF)．因此可以说，分形插值函数是样条函数的一种推广．

分形插值函数首先是由 Barnsley 于 1986 年在论文 *Fractal functions and interpolation* 中提出的，它为数据拟合提供了一种新的途径．多项式插值函数及样条函数的图象都是 1 维的光滑曲线，用它们来拟合光滑曲线是很合适的，但如用它们来近似描述震荡剧烈的曲线，例如海岸线等，就不是很理想的工具了．而分形插值函数有很强的灵活性，只要适当调整它的参数，所生成曲线的维数可以介于 1 到 2 之间的任意值．为此分形插值函数不仅可用来拟合光滑的曲线，而且更是在不光滑曲线的拟合中显示其独特的优越性．

分形插值为函数逼近论开辟了崭新的研究领域，又为计算机图形学提供了有力的工具．分形插值函数虽只有20年的历史，但内

容已经很丰富，本书不可能包罗万象、涉及各个方面，例如二元分形插值问题就未提到．还有一些内容比较艰深，超出了本书的范围．例如关于它的盒维数公式的严格证明，本书仅涉及到自仿射分形插值函数的一种简单情形．

§5.1 分形插值函数

给定闭区间 $I=[a,b]$．令 $a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b$ 是 I 的一个分划，其中 $N\geqslant 2$．令 $y_0,y_1,\ldots,y_N$ 是任意一组实数．记 $K=I\times\mathbb{R}$．

记 $I_i=[x_{i-1},x_i]$，$i=1,2,\ldots,N$．令 L_i 是 $I\to I_i$ 的一个压缩同胚，满足条件

$$L_i(x_0)=x_{i-1},\quad L_i(x_N)=x_i, \tag{5.1.1}$$

并且对某个 $0<l_i<1$，有

$$|L_i(u_1)-L_i(u_2)|\leqslant l_i\cdot|u_1-u_2|,\ \forall u_1,u_2\in I. \tag{5.1.2}$$

令 F_i 是 $K\to\mathbb{R}$ 的连续函数，满足条件

$$F_i(x_0,y_0)=y_{i-1},\quad F_i(x_N,y_N)=y_i. \tag{5.1.3}$$

并且对某个 $0\leqslant q_i<1$，有

$$|F_i(u,v_1)-F_i(u,v_2)|\leqslant q_i\cdot|v_1-v_2|,\quad \forall u\in I,\ v_1,v_2\in\mathbb{R}. \tag{5.1.4}$$

定义映射 $\omega_i:K\to K$：

$$\omega_i\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L_i(x)\\F_i(x,y)\end{pmatrix},\quad i=1,2,\ldots,N. \tag{5.1.5}$$

则 $\{K;\omega_i, i=1,2,\ldots,N\}$ 构成一个迭代函数系.

定理 5.1. *存在 I 上的连续函数 f，使得 f 的图象 $G=\mathrm{Graph}(f) \doteq \{(x,f(x))|\, x\in I\}$ 是迭代函数系 $\{K;\omega_i, i=1,2,\ldots,N\}$ 的不变集，即 $G=\bigcup_{i=1}^N \omega_i(G)$，并且 $f(x_i)=y_i$，$i=1,2,\ldots,N$. 我们称这样的 f 是对应于 $\{K;\omega_i, i=1,2,\ldots,N\}$ 的分形插值函数 (Fractal interpolation function，简称 FIF).*

证明 用 $C(I)$ 表示 I 上所有连续函数所组成的集合. 任取 $g\in C(I)$，令 $|g|_\infty=\max\{|g(x)|\,|\, x\in I\}$ 表示 g 的范数，则 $(C(I);|\cdot|_\infty)$ 构成一个完备度量空间. 令 $C_0(I)=\{g\in C(I)|\, g(x_0)=y_0$ 且 $g(x_N)=y_N\}$，显然 $C_0(I)$ 是 $C(I)$ 的一个闭子空间，从而 $(C_0(I);|\cdot|_\infty)$ 也是完备度量空间. 定义 $C_0(I)$ 到 $C_0(I)$ 的映射 T:

$$(Tg)(x)=F_i(L_i^{-1}(x), g(L_i^{-1}(x))),\quad \text{如果 } x\in I_i.$$

记 $q=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\{q_i\}$，对 $\forall g_1,g_2\in C_0(I)$，由 (5.1.4),

$$\begin{aligned}|Tg_1-Tg_2|_\infty &= \max_{1\leqslant i\leqslant N}\{|F_i(L_i^{-1}(x), g_1(L_i^{-1}(x)))\\ &\qquad - F_i(L_i^{-1}(x), g_2(L_i^{-1}(x)))|\,|\, x\in I_i\}\\ &\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant N}\{q_i\cdot|g_1(L_i^{-1}(x))-g_2(L_i^{-1}(x))|\,|\, x\in I_i\}\\ &\leqslant q\cdot|g_1-g_2|_\infty.\end{aligned}$$

因此 T 是 $(C_0(I);|\cdot|_\infty)$ 上的压缩映射，由 Banach 不动点原理知，存在惟一的 $f\in C_0(I)$ 满足 $Tf=f$，即

$$F_i(L_i^{-1}(x), f(L_i^{-1}(x)))=f(x),\quad \text{如果 } x\in I_i. \tag{5.1.6}$$

现在令 $G=\mathrm{Graph}(f)\doteq\{(x,f(x))|\, x\in I\}$ 表示 f 的图象，由

(5.1.5) 和 (5.1.6) 可得

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{N}\omega_i(G) &= \bigcup_{i=1}^{N}\{(L_i(x),F_i(x,f(x)))|\,x\in I\}\\&= \bigcup_{i=1}^{N}\{(x,F_i(L_i^{-1}(x),f(L_i^{-1}(x))))|\,x\in I_i\}\\&= \bigcup_{i=1}^{N}\{(x,f(x))|\,x\in I_i\}=G.\end{aligned}$$

所以 G 是 $\{K;\omega_i,i=1,2,\ldots,N\}$ 的不变集.

由 $f\in C_0(I)$，可知 $f(x_0)=y_0,f(x_N)=y_N$. 当 $i\in\{1,2,\ldots,N-1\}$ 时，由 (5.1.6) 和 (5.1.3)，

$$\begin{aligned}f(x_i) &= F_i(L_i^{-1}(x_i),f(L_i^{-1}(x_i)))\\&= F_i(x_N,f(x_N))=F_i(x_N,y_N)=y_i.\end{aligned}$$

□

注意迭代函数系 (5.1.5) 不一定是双曲的，因此第三章中有关双曲迭代函数系的结论不能直接应用. 定理 5.1 是用了特殊的方法证明了其不变集的存在性. 同样不变集的惟一性、用迭代法求不变集的可行性也需要另加证明，下面就来讨论这个问题.

首先引入若干记号，类似于第三章 § 2 中的讨论.

$\mathcal{H}(I)$: 表示由 I 中的非空紧子集组成的集合，其中 $I=[a,b]$;

$\mathcal{H}(K)$: 表示由 K 中的非空紧子集组成的集合，其中 $K=I\times\mathbb{R}$.

定义变换 $\omega: \mathcal{H}(K) \to \mathcal{H}(K)$ 如下:

$$\omega(A) = \bigcup_{i=1}^{N} \omega_i(A), \quad A \in \mathcal{H}(K) \tag{5.1.7}$$

定义变换 $L: \mathcal{H}(I) \to \mathcal{H}(I)$ 如下:

$$L(B) = \bigcup_{i=1}^{N} L_i(B). \quad B \in \mathcal{H}(I) \tag{5.1.8}$$

变换 ω 和 L 就是 (3.3.2) 中的 Hutchinson 算子.

因为 L_i 是 I 上的压缩映射，由定理 3.7 知，L 是完备度量空间 $(\mathcal{H}(I); h)$ 上的压缩映射，压缩因子是 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\{l_i\} < 1$. 容易验证 I 就是它的吸引子.

定理 5.2. 设 f 是对应于迭代函数系 $\{K; \omega_i, i = 1, 2, \ldots, N\}$ 的分形插值函数, $G = \mathrm{Graph}(f)$, 则对于任意 $A \in \mathcal{H}(K)$, 有

$$\lim_{n\to\infty} h(\omega^n(A), G) = 0. \tag{5.1.9}$$

从而分形插值函数是惟一的.

证明 任取 $A \in \mathcal{H}(K)$，令 A_X 表示 A 在 x 轴上的投影集，即

$$A_X = \{x | \text{存在 } y \text{ 使得 } (x, y) \in A\},$$

则 $A_X \in \mathcal{H}(I)$. 令 $T_n = \{(x, f(x)) | x \in L^n(A_X)\}$, $n \geqslant 1$. 由定理 3.8，有 $\lim\limits_{n\to\infty} h(L^n(A_X), I) = 0$，因而当 n 充分大时，$h(L^n(A_X), I)$ 将充分小. 又连续函数 f 在闭区间 I 上是一致连续的，所以当 n 充分大时，$h(T_n, G)$ 也将充分小，于是 $\lim\limits_{n\to\infty} h(T_n, G) = 0$.

令

$$t_n = \sup\left\{d((x, f(x)), (x, y)) \,\middle|\, (x, y) \in \omega^n(A)\right\},$$

其中 $d(\cdot,\cdot)$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 中的欧氏距离．由定理3.3可知，$h(T_n,\omega^n(A))\leqslant t_n$．当 $n\geqslant 1$ 时，任取 $(x,y)\in\omega^n(A)$，必存在 $(x^*,y^*)\in\omega^{n-1}(A)$ 以及 $i\in\{1,2,\ldots,N\}$，使得

$$(x,y)=(L_i(x^*),F_i(x^*,y^*)).$$

令 $q=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\{q_i\}$．由 (5.1.6)，

$$\begin{aligned}d((x,f(x)),(x,y)) &= d\left((L_i(x^*),F_i(x^*,f(x^*))),(L_i(x^*),F_i(x^*,y^*))\right)\\ &= |F_i(x^*,f(x^*))-F_i(x^*,y^*)|\\ &\leqslant q\cdot|f(x^*)-y^*|\\ &= q\cdot d((x^*,f(x^*)),(x^*,y^*))\\ &\leqslant q\cdot t_{n-1},\end{aligned}$$

所以 $t_n\leqslant q\cdot t_{n-1}$．因为 $0\leqslant q<1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=0$．于是 $\lim\limits_{n\to\infty}h(T_n,\omega^n(A))=0$．

由 Hausdorff 度量的三角形不等式，$h(G,\omega^n(A))\leqslant h(T_n,G)+h(T_n,\omega^n(A))$，于是根据上面讨论，可知 (5.1.9) 成立．

现在假设 f_1 和 f_2 都是对应于迭代函数系 $\{K;\omega_i,\ i=1,2,\ldots,N\}$ 的分形插值函数．令 $G_1=\mathrm{Graph}(f_1)$，$G_2=\mathrm{Graph}(f_2)$，则 $\omega(G_1)=G_1$，从而对任意$n\in\mathbb{N}$，$\omega^n(G_1)=G_1$．又由 (5.1.9)，

$$\lim_{n\to\infty}h(\omega^n(G_1),G_2)=0.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}h(G_1,G_2)$=0，于是 $G_1=G_2$，因此 $f_1=f_2$．□

特别当 $L_i(x)$ 和 $F_i(x,y)$ 都取为线性函数时，(5.1.5) 可写成如

下的形式

$$\omega_i\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_i & 0 \\ c_i & d_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix},\quad i=1,2,\ldots,N. \tag{5.1.10}$$

这时有 $L_i(x)=a_ix+e_i$，$F_i(x,y)=c_ix+d_iy+f_i$. 由条件 (5.1.2) 和 (5.1.4) 可知

$$0<|a_i|<1,\quad |d_i|<1. \tag{5.1.11}$$

又由

$$L_i(x_0)=x_{i-1},\ L_i(x_N)=x_i,\ F_i(x_0,y_0)=y_{i-1},\ F_i(x_N,y_N)=y_i,$$

可得方程组

$$\begin{cases} a_ix_0+e_i=x_{i-1}, \\ a_ix_N+e_i=x_i, \\ c_ix_0+d_iy_0+f_i=y_{i-1}, \\ c_ix_N+d_iy_N+f_i=y_i. \end{cases}$$

解此方程组，得到

$$\begin{cases} a_i=(x_i-x_{i-1})/(x_N-x_0), \\ e_i=(x_Nx_{i-1}-x_0x_i)/(x_N-x_0), \\ c_i=(y_i-y_{i-1})/(x_N-x_0)-d_i(y_N-y_0)/(x_N-x_0), \\ f_i=(x_Ny_{i-1}-x_0y_i)/(x_N-x_0)-d_i(x_Ny_0-x_0y_N)/(x_N-x_0). \end{cases} \tag{5.1.12}$$

由 (5.1.11) 式可知 § 3.4 中推论 3.2 的条件满足，因此 $\{\omega_i\}$ 都是压缩仿射变换，于是 $\{K;\omega_i,\ i=1,2,\ldots,N\}$ 构成一个双曲迭代

函数系. 由该迭代函数系所确定的分形插值函数，我们将称它为自仿射分形插值函数.

例 5.1. 令 $I=[0,1]$，取 $N=3,(x_0,y_0)=(0,0),(x_1,y_1)=(1/3,1),(x_2,y_2)=(2/3,1),(x_3,y_3)=(1,0)$，并取 $d_1=d_2=d_3=1/3$. 由 (5.1.12)，可得对应的迭代函数系为:

$$\omega_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3&0\\1&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},$$

$$\omega_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3&0\\0&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1/3\\1\end{pmatrix},$$

$$\omega_3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3&0\\-1&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2/3\\1\end{pmatrix}.$$

采用随机算法求 $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ 的吸引子，就可得到该自仿射分形插值函数的图象 (见图 5.1).

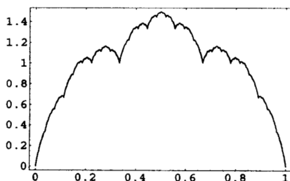


图 5.1 $d_1=d_2=d_3=1/3$ 的一个自仿射分形插值函数

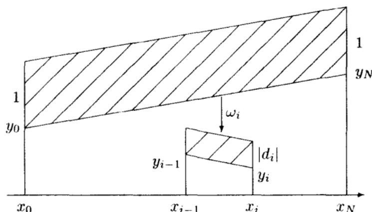


图 5.2 纵向尺度因子 d_i

现在回到 (5.1.12) 式，我们注意到每个变换 ω_i 的表达式中，都尚有一个自由变量 d_i，由 (5.1.11) 知，它应满足条件 $0 \leqslant |d_i| < 1$. d_i 通常称为纵向尺度因子，它的几何意义见图 5.2.

对于平面上同一组插值节点 $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^N$，取不同的纵向尺度因子 $\{d_i\}$，可得到不同的分形插值曲线. 当所有的 d_i 都取值为零时，分形插值曲线就是顺次连接插值点列的折线. 随着 d_i 的变化，曲线也随之变化，甚至变成一条振荡剧烈的复杂曲线.

纵向尺度因子 $|d_i| < 1$ 的条件是很关键的，如果这个条件不满足，定理 5.1 就不一定成立. 下面举个例子来说明.

例 5.2. 取平面点集 $\{(0,0),(1/2,1),(1,0)\}$，$d_1 = 1$，$d_2 = 1/2$，利用 (5.1.12) 计算，可得

$$\omega_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},$$

$$\omega_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&0\\-1&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix}.$$

我们断言，此时不存在过该平面点集的连续函数 f，使得 $G=\mathrm{Graph}(f)$ 满足 $G=\omega_1(G)\cup\omega_2(G)$.

我们用反证法证明．假定存在这样的连续函数 f，使得它的图象是迭代函数系 $\{\omega_1,\omega_2\}$ 的不变集，这时有

$$\omega_1\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x/2\\x+f(x)\end{pmatrix}. \tag{5.1.13}$$

由插值条件知 $f(1/2)=1$．在 (5.1.13) 中令 $x=1/2$，可得$f(1/2^2)=1/2+f(1/2)=1+1/2$，由归纳法可知

$$f\left(\frac{1}{2^k}\right)=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{2^i}.$$

因为 f 在 $[0,1]$ 上连续，所以 $f(0)=\lim\limits_{k\to\infty}f(1/2^k)=\sum_{i=0}^{\infty}1/2^i=2$，但 f 是过插值点集的，应该有 $f(0)=0$，矛盾． □

§5.2 自仿射分形插值函数的盒维数

令 f 是由迭代函数系 (5.1.10)

$$\omega_i\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_i&0\\c_i&d_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e_i\\f_i\end{pmatrix},\quad i=1,2,\ldots,N \tag{5.2.1}$$

确定的自仿射分形插值函数，$G = \mathrm{Graph}(f)$. 记 $s = \dim_B(G)$. 我们将证明，如果

$$\sum_{i=1}^{N} |d_i| > 1 \text{ 并且 } \{(x_i, y_i) | i = 0, 1, \ldots, N\} \text{ 不共线}, \tag{5.2.2}$$

那么 G 的盒维数 s 由下式确定:

$$\sum_{i=1}^{N} |d_i| \cdot {a_i}^{s-1} = 1. \tag{5.2.3}$$

评注 5.1. 记 $h(d) = \sum_{i=1}^{N} |d_i| \cdot {a_i}^{d-1}$. 显然 $h(d)$ 关于 d 严格递减，$\lim\limits_{d \to -\infty} h(d) = +\infty$，并且 $h(2) < \sum_{i=1}^{N} a_i = 1$，所以存在惟一的 $s \in (-\infty, 2)$ 使得 $h(s) = 1$. 此外，当 $\sum_{i=1}^{N} |d_i| > 1$ 时，$s > 1$，此时 (5.2.3) 的解 $s \in (1, 2)$.

下面我们将证明 (5.2.3) 式成立，由于证明过程相当复杂，因此有些证明从略了，有兴趣的读者可参阅文献 [6].

对于任意给定的 $p, q \in \mathbb{R}$，我们称 $[p, p+\varepsilon] \times [q, q+\varepsilon]$ 为一个 ε 正方形. 设 Φ 是 G 的一个覆盖，如果 Φ 的元素都是 ε 正方形，则称 Φ 是 G 的一个 ε 正方形覆盖. 用 $\#\Phi$ 表示 Φ 中的元素个数，记 $\mathcal{N}(\varepsilon) = \min\{\#\Phi | \Phi \text{ 是 } G \text{ 的一个 } \varepsilon \text{ 正方形覆盖}\}$. 由 § 2.4 中盒维数的定义，可知

$$\dim_B G = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log \mathcal{N}(\varepsilon)}{-\log \varepsilon},$$

(如果这个极限存在).

对于自仿射分形插值函数的盒维数，$\mathcal{N}(\varepsilon)$ 不容易估计，因此我们需要引入一种新的覆盖.

对于任意给定的 $p,q\in\mathbb{R}$ 以及 $n\in\mathbb{N}$，我们称矩形 $R=[p,p+\varepsilon]\times[q,q+n\varepsilon]$ 为一个 ε 柱，称 n 为 R 中的 ε 正方形个数，记为 $n(R,\varepsilon)$. 给定两个 ε 柱 R_1,R_2，如果 $R_i=[p_i,p_i+\varepsilon]\times[q_i,q_i+n_i\varepsilon]$，$i=1,2$，则我们称 $|p_1-p_2|$ 为 R_1 和 R_2 之间的横向距离.

设 $\Psi=\{R_1,R_2,\ldots,R_t\}$ 是 G 的一个覆盖，如果所有的 R_i 都是 ε 柱，并且任意两个 ε 柱之间的横向距离大于 $\varepsilon/2$，那么称 Ψ 是 G 的一个 ε 柱覆盖，并以 $n(\Psi,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{t}n(R_i,\varepsilon)$ 表示 Ψ 中不同 ε 柱所含有的 ε 正方形个数的总和. 令 $\mathcal{N}^*(\varepsilon)=\min\{n(\Psi,\varepsilon)\big|\,\Psi$ 是 G 的一个 ε 柱覆盖$\}$. 下面的引理说明了 $\mathcal{N}^*(\varepsilon)$ 与 $\mathcal{N}(\varepsilon)$ 的关系:

引理 5.1. 对任意 $0<\varepsilon<x_N-x_0$，有 $\mathcal{N}(\varepsilon)\leqslant\mathcal{N}^*(\varepsilon)\leqslant 2\mathcal{N}(\varepsilon)$.

证明 由 ε 柱覆盖的定义，若 $\Psi=\{R_1,R_2,\ldots,R_t\}$ 是 G 的一个 ε 柱覆盖，则存在 $n(R_i,\varepsilon)$ 个 ε 正方形覆盖 R_i，从而存在 $n(\Psi,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{t}n(R_i,\varepsilon)$ 个 ε 正方形覆盖 G，于是 $\mathcal{N}(\varepsilon)\leqslant\mathcal{N}^*(\varepsilon)$.

为证另一半不等式，我们需引入另一类覆盖: 设 Ψ 为 G 的一个覆盖，如果 Ψ 的元素都是形如 $[k\varepsilon+x_0,(k+1)\varepsilon+x_0]\times[y,y+\varepsilon]$ 的正方形，其中 $k\in\{0,1,\ldots,[(x_N-x_0)/\varepsilon]\}$，$y\in\mathbb{R}$，并且 Ψ 中的任意两个正方形的内部相交为空，则称 Ψ 为 G 的一个非重叠 ε 正方形覆盖. 定义 $\mathcal{N}^{**}(\varepsilon)=\min\{\#\Psi|\,\Psi$ 是 G 的一个非重叠 ε 正方形覆盖$\}$.

显然，$\mathcal{N}^{**}(\varepsilon)\leqslant 2\mathcal{N}(\varepsilon)$. 如果 Ψ 是 G 的一个非重叠 ε 正方形覆盖并且 $\#\Psi=\mathcal{N}^{**}(\varepsilon)$，由于 G 是连续函数的图象，所以对于任给的 $k\in\{0,1,\ldots,[(x_N-x_0)/\varepsilon]\}$，$\Psi$ 中所有形如 $[k\varepsilon+x_0,(k+1)\varepsilon+x_0]\times[y,y+\varepsilon]$ 的正方形的并集一定是一个 ε 柱，记为 R_k. 于

是 $\{R_1, R_2, \ldots, R_{t^*}\}$，其中 $t^* = \lfloor (x_N - x_0)/\varepsilon \rfloor$，构成 G 的一个 ε 柱覆盖，从而 $\mathcal{N}^*(\varepsilon) \leqslant \mathcal{N}^{**}(\varepsilon) \leqslant 2\mathcal{N}(\varepsilon)$. □

令 $G_i = \omega_i(G)$. 记 $\mathcal{N}_i^*(\varepsilon) = \min\{n(\Psi, \varepsilon) \,|\, \Psi$ 是 G_i 的一个 ε 柱覆盖$\}$. 那么直观地，$\sum_{i=1}^N \mathcal{N}_i^*(\varepsilon) \approx \mathcal{N}^*(\varepsilon)$，更精确地，我们有下面的引理:

引理 5.2. *存在常数 $\eta, \zeta > 0$，使得对任意 $0 < \varepsilon < \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}\{x_i - x_{i-1}\}$，有*

$$\sum_{i=1}^{N} \mathcal{N}_i^*(\varepsilon) - \frac{\eta}{\varepsilon} \leqslant \mathcal{N}^*(\varepsilon) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \mathcal{N}_i^*(\varepsilon) + \frac{\zeta}{\varepsilon}.$$

证明略. □

接下来，为了估计 $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\log \mathcal{N}^*(\varepsilon)}{-\log \varepsilon}$，我们将建立递推关系 (见 (5.2.4) 和 (5.2.5)).

我们首先考察 G 的 ε/a_i 柱覆盖和 G_i 的 ε 柱覆盖之间的联系. 设 $\Psi = \{R_1, \ldots, R_t\}$ 是 G 的一个 ε/a_i 柱覆盖，并使得 $n(\Psi, \varepsilon/a_i) = \mathcal{N}^*(\varepsilon/a_i)$，则 $\{\omega_i(R_1), \ldots, \omega_i(R_t)\}$ 覆盖 G_i. 注意到对任意的 $1 \leqslant j \leqslant t$，$\omega_i(R_j)$ 是平行四边形，我们对这些集合进行适当放大，就可以使它们成为 $\omega_i(G)$ 的 ε 柱覆盖 $\{R_1', \ldots, R_t'\}$. 设 R_j 由 n_j 个 ε/a_i 正方形组成，注意到由图 5.3，R_j' 约由

$$\left\lceil \frac{|d_i| n_j \varepsilon}{a_i \varepsilon} \right\rceil = \left\lceil \frac{|d_i| n_j}{a_i} \right\rceil$$

个 ε 正方形组成. 精确地，可证存在常数 $\gamma_i > 0$，使得

$$\mathcal{N}_i^*(\varepsilon) \leqslant \sum_{j=1}^{N} \frac{|d_i|}{a_i} n_j + \frac{\gamma_i}{\varepsilon} = \frac{|d_i|}{a_i} \mathcal{N}^*(\varepsilon/a_i) + \frac{\gamma_i}{\varepsilon}.$$

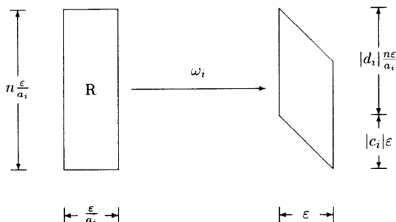


图 5.3 映射 ω_i 的示意图

于是由引理 5.2，存在常数 $\beta_2 > 0$，使得

$$\mathcal{N}^*(\varepsilon) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \mathcal{N}_i^*(\varepsilon) + \frac{\zeta}{\varepsilon} \leqslant \sum_{i=1}^{N} \frac{|d_i|}{a_i} \mathcal{N}^*(\varepsilon/a_i) + \beta_2/\varepsilon. \tag{5.2.4}$$

类似地 (见图 5.4)，可以证明存在常数 $\theta_i > 0$，使得

$$\mathcal{N}_i^*(\varepsilon) \geqslant \frac{|d_i|}{a_i} \mathcal{N}^*(\varepsilon/a_i) - \frac{\theta_i}{\varepsilon},$$

从而存在常数 $\beta_1 > 0$，使得

$$\mathcal{N}^*(\varepsilon) \geqslant \sum_{i=1}^{N} \mathcal{N}_i^*(\varepsilon) - \frac{\eta}{\varepsilon} \geqslant \sum_{i=1}^{N} \frac{|d_i|}{a_i} \mathcal{N}^*(\varepsilon/a_i) - \beta_1/\varepsilon. \tag{5.2.5}$$

在证明维数定理之前，我们还需要下面的引理.

引理 5.3. 如果条件 (5.2.2) 成立，那么 $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon N^*(\varepsilon) = \infty$.

简要证明 以 $y = g(x)$ 表示过 (x_0, y_0) 与 (x_N, y_N) 的线性函数. 因为 $\{(x_i, y_i) | i = 0, 1, \ldots, N\}$ 不共线，所以存在 $l \in \{1, 2, \ldots,$

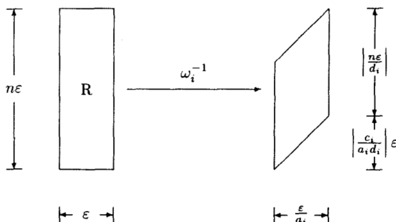


图 5.4 映射 ω_i^{-1} 的示意图

$N-1\}$，使得 (x_l, y_l) 不在由 (x_0, y_0) 与 (x_N, y_N) 确定的直线上. 于是 $V \doteq |y_l - g(x_l)| > 0$.

令 $\delta = \min_{1\leqslant i\leqslant N}\{x_i - x_{i-1}\}$. 通过递推，我们可以证明，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，当 $0 < \varepsilon < \delta^k$ 时，有

$$N^*(\varepsilon) \geqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}|d_i|\right)^k \frac{V}{\varepsilon}.$$

因为 $\sum_{i=1}^{N}|d_i| > 1$，所以引理成立. □

现在我们给出自仿射分形插值函数的盒维数公式的证明.

定理 5.3. 令 f 是由迭代函数系 (5.1.10) 确定的自仿射分形插值函数. 记 $G = \mathrm{Graph}(f)$. 如果 $\sum_{i=1}^{N}|d_i| > 1$ 并且 $\{(x_i, y_i)|\, i = 0, 1, \ldots, N\}$ 不共线，那么 $\dim_B(G)$ 就是满足 $\sum_{i=1}^{N}|d_i|\cdot a_i^{s-1} = 1$ 的惟一解 s；不然，$\dim_B(G) = 1$.

证明 情形 1. 如果条件 (5.2.2) 满足. 由本节开头部分的讨论知，方程 (5.2.3) 的解 s 一定满足 $s \in (1,2)$.

设 β_1, β_2 为对应于 (5.2.5) 式和 (5.2.4) 式的常数. 令

$$\underline{a} = \min_{1 \leqslant i \leqslant N}\{a_i\}, \quad \overline{a} = \max_{1 \leqslant i \leqslant N}\{a_i\}, \quad \gamma = \sum_{i=1}^{N} |d_i|.$$

那么由条件 (5.2.2)，可知 $\gamma > 1$，从而由引理 5.3，我们可以选取充分小的 $\varepsilon_0 > 0$，使得对任意 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0/\underline{a}$，有

$$\mathcal{N}^*(\varepsilon) \geqslant 2\left(\frac{\beta_1}{\gamma - 1}\right)\varepsilon^{-1}.$$

选取充分小的 $k_1 > 0$ 使得 $k_1 {\varepsilon_0}^{-s} \leqslant (\beta_1/(\gamma-1)){\varepsilon_0}^{-1}$，又选取充分大的 k_2 使得对任意 $\varepsilon_0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0/\underline{a}$，有

$$\mathcal{N}^*(\varepsilon) \leqslant \frac{\beta_2}{1-\gamma}\varepsilon^{-1} + k_2\varepsilon^{-s}.$$

令

$$\underline{\phi}(\varepsilon, k_1) = \frac{\beta_1}{\gamma - 1}\varepsilon^{-1} + k_1\varepsilon^{-s}, \quad \overline{\phi}(\varepsilon, k_2) = \frac{\beta_2}{1-\gamma}\varepsilon^{-1} + k_2\varepsilon^{-s},$$

并简记为 $\underline{\phi}(\varepsilon)$ 和 $\overline{\phi}(\varepsilon)$，那么对 $\varepsilon_0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0/\underline{a}$，有

$$\underline{\phi}(\varepsilon) \leqslant \mathcal{N}^*(\varepsilon) \leqslant \overline{\phi}(\varepsilon). \tag{5.2.6}$$

如果 $\overline{a}\varepsilon_0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$，那么 $\varepsilon \leqslant \varepsilon/a_i \leqslant \varepsilon_0/\underline{a}$，因此

$$\mathcal{N}^*(\varepsilon) \leqslant \sum_{i=1}^{N}\frac{|d_i|}{a_i}\mathcal{N}^*\left(\frac{\varepsilon}{a_i}\right) + \frac{\beta_2}{\varepsilon} \leqslant \sum_{i=1}^{N}\frac{|d_i|}{a_i}\overline{\phi}\left(\frac{\varepsilon}{a_i}\right) + \frac{\beta_2}{\varepsilon} = \overline{\phi}(\varepsilon).$$

同理对任意 $\overline{a}\varepsilon_0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$，都有 $\mathcal{N}^*(\varepsilon) \geqslant \underline{\phi}(\varepsilon)$.

假设 (5.2.6) 对任意 $\overline{a}^n\varepsilon_0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ 成立，那么同上讨论，可证 (5.2.6) 对所有 $\overline{a}^{n+1}\varepsilon_0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ 也成立．由归纳法，(5.2.6) 对所有 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ 成立．

于是由 $s > 1$，得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log \mathcal{N}^*(\varepsilon)}{-\log\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log \underline{\phi}(\varepsilon)}{-\log\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log \overline{\phi}(\varepsilon)}{-\log\varepsilon} = s,$$

从而 $\dim_B(G) = s$．

情形 2. $\gamma = \sum_{i=1}^N |d_i| < 1$，则 $s < 1$．如同情形 1 一样，我们可证明存在 $\varepsilon_0 > 0$ 和 $k_2 > 0$，使得对任意 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$，有

$$\mathcal{N}^*(\varepsilon) \leqslant (\beta_2/(1-\gamma))\varepsilon^{-1} + k_2\varepsilon^{-s}.$$

于是由 $s < 1$ 和 $\beta_2/(1-\gamma) > 0$，可得

$$\overline{\dim}_B(G) = \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{\log \mathcal{N}^*(\varepsilon)}{-\log\varepsilon} \leqslant 1.$$

又 G 是 $[x_0, x_N]$ 上的连续函数的图象，所以 $\underline{\dim}_B(G) \geqslant 1$，从而 $\dim_B(G) = 1$．

情形 3. $\gamma = \sum_{i=1}^N |d_i| = 1$，则 $s = 1$．令

$$\overline{\phi}(\varepsilon) = \left(\frac{\beta_2}{\sum_{i=1}^N |d_i|\log a_i}\right)\frac{\log\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{k_2}{\varepsilon}.$$

如同情形 1 和情形 2，可选取 $k_2 > 0$ 使得对 $0 < \varepsilon < x_N - x_0$ 都有 $\mathcal{N}(\varepsilon) \leqslant \overline{\phi}(\varepsilon)$，于是可得 $\dim_B(G) = 1$．

情形 4. $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^N$ 共线．此时 G 是一条线段，所以我们有 $\dim_B(G) = 1$． □

由定理 5.3，我们可以立刻得到下面的推论．

推论 5.1. 若仿射分形插值函数系 (5.2.1) 是等距分割，即对 $\forall i$，$a_i = 1/N$. 如果

$$\sum_{i=1}^{N} |d_i| > 1 \text{ 并且 } \{(x_i, y_i) | i = 0, 1, \ldots, N\} \text{ 不共线}, \tag{5.2.7}$$

那么对应的分形插值函数图象的盒维数 s 由下式确定:

$$s = 1 + \frac{\log \sum_{i=1}^{N} |d_i|}{\log N}. \tag{5.2.8}$$

否则 $s = 1$.

又若进一步假定对 $\forall i$，$d_i = d$ 并且条件 (5.2.7) 满足，则有

$$s = 2 + \frac{\log |d|}{\log N}. \tag{5.2.9}$$

评注 5.2. 从 (5.2.9) 看出，当 d 从 $1/N$ 逐渐递增到 1 时，其对应的分形插值函数的盒维数将从 1 逐渐递增到 2. 同时我们注意到，对于这一类分形插值函数，它们的盒维数与 y_i 的取值无关 (除非是 $\{(x_i, y_i)\}$ 共线)，完全由纵向尺度因子决定.

例 5.3. 在例 5.1 中，$d_1 = d_2 = d_3 = 1/3$，从而 $d_1 + d_2 + d_3 = 1$，因此它的盒维数为 1. 在 § 5.3 中将看到，该分形插值函数属于 $\mathrm{Lip}\,\nu\,(\forall \nu \in (0, 1))$.

§ 5.3 分形插值函数的光滑性

在 § 5.1 中我们证明了分形插值函数是连续函数，本节将进一步讨论它的结构性质，就是所谓的光滑性，为此我们需要引入函数的“连续模”概念.

定义 5.1. 设函数 f 定义在区间 $[a,b]$ 上，称数

$$\omega(f,\delta)=\sup_{\substack{x,y\in[a,b]\\|x-y|\leqslant\delta}}|f(x)-f(y)|,\quad \delta>0 \tag{5.3.1}$$

为函数 f 的连续模.

粗略地说，连续模表明了，当自变量的两个值相差不大于 δ 时，函数的两个值彼此间究竟能相差多少. 直观地说，$\omega(f,\delta)$ 的值越小，函数将越平滑.

在 § 2.2 中我们曾引入了 Hölder 条件：若存在常数 $c>0$ 和 $\alpha>0$，使得

$$|f(x)-f(y)|\leqslant c|x-y|^{\alpha},\quad \forall x,y\in[a,b],$$

则称 f 满足 Hölder 条件，α 称为 Hölder 指数，并写成 $f\in \mathrm{Lip}_c\alpha$. 对于系数 c 无关紧要的情形，可使用较简单的记号：$f\in \mathrm{Lip}\,\alpha$. 也就是说，$\mathrm{Lip}\,\alpha=\bigcup_{c>0}\mathrm{Lip}_c\alpha$.

因为当 $\alpha>1$ 时，f 只能是常数，因此我们只考虑 $\alpha\in(0,1]$ 的情形. 显然若 $\alpha<\beta$，则 $\mathrm{Lip}\,\alpha\supset\mathrm{Lip}\,\beta$. 粗略地说，满足具有较大的 Hölder 指数的那些函数比满足较小指数的函数要"好一些"，其中"最好的"函数是 Lip 1 中的函数.

容易看出，若 $f\in \mathrm{Lip}_c\alpha$，则有 $\omega(f,\delta)\leqslant c\delta^{\alpha}$，反过来也成立. 也就是说关系式

$$f\in \mathrm{Lip}_c\alpha \quad 与 \quad \omega(f,\delta)\leqslant c\delta^{\alpha}$$

是完全等价的.

下面我们将研究一类分形插值函数的连续模．不失一般性，我们可取闭区间 $I=[0,1]$，$0=x_0<x_1<\cdots<x_N=1$，令

$$\begin{cases} L_i(x)=x_{i-1}+(x_i-x_{i-1})x, \\ F_i(x,y)=d_iy+q_i(x), \end{cases} \quad i=1,2,\ldots,N, \tag{5.3.2}$$

其中 $0<|d_i|<1$，$q_i(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha_i$，$0<\alpha_i\leqslant 1$，$F_i(x,y)$ 满足条件 (5.1.3) 和 (5.1.4)．用 $f(x)$ 表示由该迭代函数系确定的分形插值函数．

记 $I_i=[x_{i-1},x_i]$，那么有 $L_i(I)=I_i$．用 $|I_i|$ 表示区间 I_i 的长度，此时

$$L_i(I)=L_i(0)+|I_i|\cdot I.$$

用 $r_1,r_2,\ldots,r_m,\ldots$ 表示一个自然数序列，且 $1\leqslant r_j\leqslant N$，$\forall j$．定义

$$L_{r_m\cdots r_2r_1}(I)\doteq L_{r_m}(L_{r_{m-1}\cdots r_2r_1}(I))=L_{r_m}(0)+|I_{r_m}|\cdot L_{r_{m-1}\cdots r_2r_1}(I). \tag{5.3.3}$$

将 $L_{r_k\cdots r_2r_1}(I)$ 简单记为 $I_{r_k\cdots r_2r_1}$，这样 (5.3.3) 可以改写为

$$I_{r_m\cdots r_2r_1}=L_{r_m}(0)+|I_{r_m}|\cdot I_{r_{m-1}\cdots r_2r_1}. \tag{5.3.4}$$

由 (5.3.4) 归纳可知

$$|I_{r_m\cdots r_2r_1}|=|I_{r_1}|\cdot|I_{r_2}|\cdots|I_{r_m}|. \tag{5.3.5}$$

引理 5.4. 设 f 是由 (5.3.2) 确定的分形插值函数，记

$$S_{r_m\cdots r_2r_1}\doteq\int_{I_{r_m\cdots r_2r_1}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

则对于任意的 $1 \leqslant t \leqslant m$，有

$$S_{r_m\cdots r_2r_1} = \sum_{k=t}^{m}\prod_{j=k+1}^{m}(|I_{r_j}|\cdot d_{r_j})|I_{r_k}|\int_{I_{r_{k-1}\cdots r_2r_1}} q_{r_k}(y)\,\mathrm{d}y + \prod_{j=t}^{m}(|I_{r_j}|\cdot d_{r_j})\int_{I_{r_{t-1}\cdots r_2r_1}} f(y)\,\mathrm{d}y, \qquad (5.3.6)$$

这里规定 $\prod_{m+1}^{m}(\cdot) \doteq 1$，并且规定当 $k=1$ 时，$I_{r_{k-1}\cdots r_2r_1} = [0,1]$.

证明 由 (5.3.3) 式，

$$S_{r_m\cdots r_2r_1} = \int_{L_{r_m}(0)+|I_{r_m}|\cdot I_{r_{m-1}\cdots r_2r_1}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

作变量替换，令 $y=(x-L_{r_m}(0))/|I_{r_m}|$，那么有

$$\begin{aligned} S_{r_m\cdots r_2r_1} &= \int_{I_{r_{m-1}\cdots r_2r_1}} f(L_{r_m}(0)+|I_{r_m}|\cdot y)\cdot|I_{r_m}|\,\mathrm{d}y \\ &= |I_{r_m}|\cdot\int_{I_{r_{m-1}\cdots r_2r_1}} f(L_{r_m}(y))\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

由 (5.1.6) 式，有

$$d_i f(L_i^{-1}(x)) + q_i(L_i^{-1}(x)) = f(x), \quad x\in I_i,$$

于是可得

$$d_i f(x) + q_i(x) = f(L_i(x)), \quad x\in I. \qquad (5.3.7)$$

将 (5.3.7) 代入上述积分式子，有

$$S_{r_m\cdots r_2r_1} = |I_{r_m}|\cdot\int_{I_{r_{m-1}\cdots r_2r_1}} q_{r_m}(y)\,\mathrm{d}y + |I_{r_m}|\cdot d_{r_m}\cdot\int_{I_{r_{m-1}\cdots r_2r_1}} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

由归纳可得

$$
\begin{aligned}
S_{r_m\cdots r_2r_1} &= |I_{r_m}|\cdot\int_{I_{r_{m-1}\cdots r_2r_1}} q_{r_m}(y)\,\mathrm{d}y \\
&\quad + |I_{r_m}|\cdot d_{r_m}\cdot|I_{r_{m-1}}|\cdot\int_{I_{r_{m-2}\cdots r_2r_1}} q_{r_{m-1}}(y)\,\mathrm{d}y \\
&\quad + |I_{r_m}|\cdot d_{r_m}\cdot|I_{r_{m-1}}|\cdot d_{r_{m-1}}\cdot\int_{I_{r_{m-2}\cdots r_2r_1}} f(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \sum_{k=t}^{m}\prod_{j=k+1}^{m}(|I_{r_j}|\cdot d_{r_j})|I_{r_k}|\int_{I_{r_{k-1}\cdots r_2r_1}} q_{r_k}(y)\,\mathrm{d}y \\
&\quad + \prod_{j=t}^{m}(|I_{r_j}|\cdot d_{r_j})\int_{I_{r_{t-1}\cdots r_2r_1}} f(y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

□

定义 5.2. 定义 $C(I)$ 上的算子

$$
P_m(f,x) = \sum_{r_1,r_2,\dots,r_m=1}^{N} \chi_{r_m\cdots r_2r_1}(x)\frac{S_{r_m\cdots r_2r_1}}{|I_{r_m\cdots r_2r_1}|}, \tag{5.3.8}
$$

其中

$$
\chi_{r_m\cdots r_2r_1}(x) = \begin{cases} 1, & x\in \widetilde{I}_{r_m\cdots r_2r_1}, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}
$$

这里 $\widetilde{I}_{r_m\cdots r_2r_1}$ 是一左闭右开的区间，它是将闭区间 $I_{r_m\cdots r_2r_1}$ 的右端点除去后余下的部分，但规定 $\widetilde{I}_{NN\cdots N} = I_{NN\cdots N}$.

引理 5.5. 若 $f\in C(I)$，则当 $m\to\infty$ 时，$P_m(f,x)$ 将一致收敛到 f.

证明 连续函数在闭区间上是一致连续的，因而对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对任意 $x',x''\in I$，只要 $|x'-x''|<\delta$，

就有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. 又注意到 (5.3.5) 式，当 m 趋于无穷时，$|I_{r_m\cdots r_2r_1}|$ 将一致趋于 0，于是当 m 足够大时，有 $|I_{r_m\cdots r_2r_1}| < \delta$. 对任意 $x\in I$，不妨设 $x\in \widetilde{I}_{r_m\cdots r_2r_1}$，利用积分中值定理，存在 $\xi\in I_{r_m\cdots r_2r_1}$，使得

$$\begin{aligned}P_m(f,x)-f(x) &= \frac{S_{r_m\cdots r_2r_1}}{|I_{r_m\cdots r_2r_1}|}-f(x)\\ &= \frac{1}{|I_{r_m\cdots r_2r_1}|}\int_{I_{r_m\cdots r_2r_1}} f(x)\,\mathrm{d}x - f(x)\\ &= f(\xi)-f(x).\end{aligned}$$

因为 $|\xi - x| \leqslant |I_{r_m\cdots r_2r_1}| < \delta$，所以当 m 足够大时，就有

$$|P_m(f,x)-f(x)|<\varepsilon.$$

□

下面讨论分形插值函数 f 的连续模. 假定 $0\leqslant x<y\leqslant 1$，取最小可能的数 m，使得存在子区间 $I_{r_m\cdots r_2r_1}\subset [x,y]$，从而子区间 $I_{r_m\cdots r_2}\not\subset [x,y]$. 于是下面两种情况至少有一种出现：$x\in I_{r_m\cdots r_2}$ 或 $y\in I_{r_m\cdots r_2}$.

假定 $x\in I_{r_m\cdots r_2}$ (另一种情况可类似讨论)，则一定存在 $s\leqslant r_1$，使 $x\in \widetilde{I}_{r_m\cdots r_2s}$，同时有 $y\in \widetilde{I}_{r_m\cdots r_2t'}$ $(t'\geqslant r_1)$ 或 $y\in \widetilde{I}_{r_m\cdots r_3(r_2+1)t''}$. 综合上述讨论，取 $n>m$，可以进一步假定

$$x\in \widetilde{I}_{r_m\cdots r_2su_{n-m}\cdots u_1},\quad y\in \widetilde{I}_{r_m\cdots r_3r_2'tv_{n-m}\cdots v_1}.$$

利用引理 5.4，计算可得

$$P_n(f,x) = \frac{1}{|I_{r_m\cdots r_2su_{n-m}\cdots u_1}|}\int_{I_{r_m\cdots r_2su_{n-m}\cdots u_1}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{|I_{r_m\cdots r_2 s u_{n-m}\cdots u_1}|}\Bigg\{\sum_{k=3}^{m}\prod_{j=k+1}^{m}(|I_{r_j}|\cdot d_{r_j})\cdot|I_{r_k}| \\
&\qquad\qquad \cdot\int_{I_{r_{k-1}\cdots r_2 s u_{n-m}\cdots u_1}} q_{r_k}(y)\,\mathrm{d}y \\
&\qquad\qquad + \prod_{j=3}^{m}(|I_{r_j}|\cdot d_{r_j})\cdot\int_{I_{r_2 s u_{n-m}\cdots u_1}} f(y)\,\mathrm{d}y\Bigg\} \\
&= \sum_{k=3}^{m}\left(\prod_{j=k+1}^{m} d_{r_j}\right)\cdot\frac{1}{|I_{r_{k-1}\cdots r_2 s u_{n-m}\cdots u_1}|} \\
&\qquad\qquad \cdot\int_{I_{r_{k-1}\cdots r_2 s u_{n-m}\cdots u_1}} q_{r_k}(y)\,\mathrm{d}y \\
&\qquad + \left(\prod_{j=3}^{m} d_{r_j}\right)\frac{1}{|I_{r_2 s u_{n-m}\cdots u_1}|}\int_{I_{r_2 s u_{n-m}\cdots u_1}} f(y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

类似地有

$$
\begin{aligned}
P_n(f,y) &= \sum_{k=3}^{m}\left(\prod_{j=k+1}^{m} d_{r_j}\right)\cdot\frac{1}{|I_{r_{k-1}\cdots r_3 r_2' t v_{n-m}\cdots v_1}|} \\
&\qquad\qquad \cdot\int_{I_{r_{k-1}\cdots r_3 r_2' t v_{n-m}\cdots v_1}} q_{r_k}(y)\,\mathrm{d}y \\
&\qquad + \left(\prod_{j=3}^{m} d_{r_j}\right)\frac{1}{|I_{r_2' t v_{n-m}\cdots v_1}|}\int_{I_{r_2' t v_{n-m}\cdots v_1}} f(y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

注意在上式中，当 $k=3$ 时，$I_{r_{k-1}\cdots r_3 r_2' t v_{n-m}\cdots v_1} = I_{r_2' t v_{n-m}\cdots v_1}$.

于是可得

$P_n(f,x) - P_n(f,y)$

$$= \sum_{k=3}^{m}\left(\prod_{j=k+1}^{m} d_{r_j}\right)\cdot\left\{\int_{I_{r_{k-1}\cdots r_2 s u_{n-m}\cdots u_1}} \frac{q_{r_k}(y)\,\mathrm{d}y}{|I_{r_{k-1}\cdots r_2 s u_{n-m}\cdots u_1}|} - \int_{I_{r_{k-1}\cdots r_3 r_2' t v_{n-m}\cdots v_1}} \frac{q_{r_k}(y)\,\mathrm{d}y}{|I_{r_{k-1}\cdots r_3 r_2' t v_{n-m}\cdots v_1}|}\right\}$$

$$+\left(\prod_{j=3}^{m} d_{r_j}\right)\left\{\int_{I_{r_2 s u_{n-m}\cdots u_1}} \frac{f(y)\,\mathrm{d}y}{|I_{r_2 s u_{n-m}\cdots u_1}|} - \int_{I_{r_2' t v_{n-m}\cdots v_1}} \frac{f(y)\,\mathrm{d}y}{|I_{r_2' t v_{n-m}\cdots v_1}|}\right\}.$$

用 $x_{r_{k-1}\cdots r_3}$ 表示闭区间 $I_{r_{k-1}\cdots r_3}$ 的左端点 (当 $k=3$ 时，规定 $I_{r_{k-1}\cdots r_3}=[0,1]$)．设 $|f|_\infty = M_1$，又由假定 $q_i\in \mathrm{Lip}\,\alpha_i$，因此存在 $M_2>0$，使得

$$|q_i(x)-q_i(y)| \leqslant M_2|x-y|^{\alpha_i}, \quad \forall i.$$

这样我们有

$$\begin{aligned}
&|P_n(f,x)-P_n(f,y)| \\
&\leqslant \sum_{k=3}^{m}\left(\prod_{j=k+1}^{m} |d_{r_j}|\right)\cdot\left|\int_{I_{r_{k-1}\cdots r_2 s u_{n-m}\cdots u_1}} \frac{q_{r_k}(y)-q_{r_k}(x_{r_{k-1}\cdots r_3})\,\mathrm{d}y}{|I_{r_{k-1}\cdots r_2 s u_{n-m}\cdots u_1}|}\right. \\
&\quad \left. - \int_{I_{r_{k-1}\cdots r_3 r_2' t v_{n-m}\cdots v_1}} \frac{q_{r_k}(y)-q_{r_k}(x_{r_{k-1}\cdots r_3})\,\mathrm{d}y}{|I_{r_{k-1}\cdots r_3 r_2' t v_{n-m}\cdots v_1}|}\right| + 2M_1\cdot\prod_{j=3}^{m}|d_{r_j}| \\
&\leqslant \sum_{k=3}^{m}\left(\prod_{j=k+1}^{m} |d_{r_j}|\right)\cdot 2\left|I_{r_{k-1}\cdots r_3}\right|^{\alpha_{r_k}}\cdot M_2 + 2M_1\cdot\prod_{j=3}^{m}|d_{r_j}| \\
&= 2M_2\sum_{k=3}^{m}\left(\prod_{j=k+1}^{m} |d_{r_j}|\right)\cdot\frac{\prod_{i=3}^{m}|I_{r_i}|^{\alpha_{r_k}}}{\prod_{j=k}^{m}|I_{r_j}|^{\alpha_{r_k}}} + 2M_1\cdot\prod_{j=3}^{m}|d_{r_j}|.
\end{aligned}$$

记

$$d = \max_{1\leqslant i\leqslant N} |d_i|, \quad |I_{\min}| = \min_{1\leqslant i\leqslant N} |I_i|, \quad |I_{\max}| = \max_{1\leqslant i\leqslant N} |I_i|,$$

$$\alpha = \min_{1\leqslant i\leqslant N} \alpha_i, \quad \beta = \max_{1\leqslant i\leqslant N} \alpha_i, \quad c_i = |d_i|/|I_i|^\beta, \quad C = \max_{1\leqslant i\leqslant N} c_i.$$

又注意到 $|I_{r_m\cdots r_2r_1}| = \prod_{j=1}^m |I_{r_j}| \leqslant |x-y|$，可得

$$\begin{aligned}
&|P_n(f,x) - P_n(f,y)| \\
&\leqslant \frac{2M_2}{|I_{r_1}|^\alpha \cdot |I_{r_2}|^\alpha} \prod_{i=1}^m |I_{r_i}|^\alpha \cdot \sum_{k=3}^m \prod_{j=k+1}^m \frac{|d_{r_j}|}{|I_{r_j}|^\beta} \cdot \frac{1}{|I_{r_k}|^\beta} \\
&\quad + 2M_1 \cdot \frac{1}{|I_{r_1}|^\alpha \cdot |I_{r_2}|^\alpha} \left(\prod_{j=1}^m |I_{r_j}|^\alpha \right) \cdot \prod_{j=3}^m \frac{|d_{r_j}|}{|I_{r_j}|^\alpha}.
\end{aligned}$$

记 $M_1' = 2M_1/|I_{\min}|^{2\alpha}$，$M_2' = 2M_2/|I_{\min}|^{2\alpha+\beta}$，则有

$$\begin{aligned}
&|P_n(f,x) - P_n(f,y)| \\
&\leqslant \prod_{i=1}^m |I_{r_i}|^\alpha \left[M_2' \sum_{k=3}^m \prod_{j=k+1}^m c_{r_j} + M_1' \prod_{j=3}^m c_{r_j} \right] \\
&\leqslant |x-y|^\alpha \left\{ M_2' \sum_{k=3}^m C^{m-k} + M_1' C^{m-2} \right\} \\
&\leqslant M'|x-y|^\alpha \left\{ \sum_{k=3}^m C^{m-k} + C^{m-2} \right\} \qquad (M' = \max\{M_1', M_2'\}) \\
&= M'|x-y|^\alpha \sum_{j=0}^{m-2} C^j. \qquad (5.3.9)
\end{aligned}$$

现在分三种情况来讨论 (5.3.9) 的不等式.

情形 1. 如果 $C < 1$，那么由 (5.3.9) 可得

$$|P_n(f,x) - P_n(f,y)| \leqslant \frac{M'}{1-C} |x-y|^\alpha. \qquad (5.3.10)$$

情形 2. 如果 $C=1$，则

$$|P_n(f,x)-P_n(f,y)|\leqslant M'(m-1)|x-y|^\alpha.$$

因为 $|x-y|\leqslant|I_{r_m\cdots r_3}|\leqslant|I_{\max}|^{m-2}<1$，取对数，可得 $m-2\leqslant\log|x-y|/\log|I_{\max}|$，因此

$$|P_n(f,x)-P_n(f,y)|\leqslant M'|x-y|^\alpha+\frac{M'}{\log|I_{\max}|}|x-y|^\alpha\log|x-y|. \tag{5.3.11}$$

情形 3. 如果 $C>1$，那么存在常数 $M>0$，使得

$$|P_n(f,x)-P_n(f,y)|\leqslant M|x-y|^\alpha C^m.$$

选择某 $\gamma>0$，使得 $|x-y|^\alpha C^m\leqslant|x-y|^\gamma$，取对数，可得

$$\gamma\leqslant\alpha+m\frac{\log C}{\log|x-y|},$$

但注意到 $|x-y|\geqslant|I_{\min}|^m$，因此

$$1/\log|x-y|\leqslant1/(m\log|I_{\min}|),$$

于是

$$\gamma\leqslant\alpha+\frac{\log C}{\log|I_{\min}|}.$$

又 $C\leqslant d/|I_{\min}|^\beta$，所以 $\log C\leqslant\log d-\beta\log|I_{\min}|$，代入上式得

$$\gamma\leqslant\frac{\log d}{\log|I_{\min}|}+\alpha-\beta. \tag{5.3.12}$$

这样我们有

$$|P_n(f,x)-P_n(f,y)|\leqslant M|x-y|^\gamma, \tag{5.3.13}$$

其中 γ 满足不等式 (5.3.12).

根据上面的讨论，我们可以证明下面的定理.

定理 5.4. 设 f 是由 (5.3.2) 所确定的分形插值函数，记 $\alpha = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\{\alpha_i\}$，$\beta = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\{\alpha_i\}$，$d = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}|d_i|$，$c_i = |d_i|/|I_i|^\beta$，$C = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\{c_i\}$，则有

(1) 若 $C < 1$，则 $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$;

(2) 若 $C = 1$，则 $\omega(f,t) = O(t^\alpha|\log t|)$;

(3) 若 $C > 1$，则对任何满足不等式 (5.3.12) 的 γ 有 $f \in \mathrm{Lip}\,\gamma$.

证明 我们只证情况 (1)，其余类似. 根据引理 5.5，在不等式 (5.3.10) 中令 $n \to \infty$，可得

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{M'}{1-C}|x-y|^\alpha,$$

因此 $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$. □

推论 5.2. 设在函数系 (5.3.2) 中，区间 $I = [0,1]$ 是等距分割，即 $x_i = i/N$，$i = 0,1,\ldots,N$，又假设对任意 i，有 $\alpha_i = \alpha$. 记 $d = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}|d_i|$，则有

(1) 当 $d < N^{-\alpha}$ 时，$f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$;

(2) 当 $d = N^{-\alpha}$ 时，$\omega(f,t) = O(t^\alpha|\log t|)$;

(3) 当 $d > N^{-\alpha}$ 时，$f(x) \in \mathrm{Lip}\,\gamma$，其中 $\gamma = -\log d/\log N$.

例如，在 § 5.1 中例 1 所讨论的分形插值函数 $f(x)$，有 $N = 3$，$d = 1/3$，$\alpha = 1$，可见 $d = N^{-1}$，因此由推论可知 $\omega(f,t) = O(t|\log t|)$，它介于 Lip1 与 $\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(\forall\alpha < 1)$ 之间.

§ 5.4　分形插值函数的微积分

从 § 5.3 我们知道，分形插值函数在一定条件下有很好的光滑性，甚至可以属于 Lip 1 类，因此可以讨论对分形插值函数进行积分和微分的运算．本节仍是讨论如下形式的分形插值函数系：

$$\begin{cases} L_i(x) = x_{i-1} + \dfrac{x_i - x_{i-1}}{x_N - x_0}(x - x_0), \\ F_i(x, y) = d_i y + q_i(x), \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{5.4.1}$$

其中 $x_0 < x_1 < \cdots < x_N$ 是区间 $I = [x_0, x_N]$ 的一个分划，并且对任意 i，$|d_i| < 1$，以及 $q_i(x)$ 在 I 上连续．

定理 5.5. 设 f 是由 (5.4.1) 确定的分形插值函数．设 $\hat{y}_0 \in \mathbb{R}$，令

$$\hat{f}(x) = \hat{y}_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{5.4.2}$$

则 $\hat{f}$ 是由 $\{(L_i(x), \hat{F}_i(x, y))\}_{i=1}^{N}$ 确定的分形插值函数，其中对 $i = 1, 2, \ldots, N$，有

$$\hat{F}_i(x, y) = a_i d_i y + \hat{q}_i(x),$$

$$a_i = (x_i - x_{i-1})/(x_N - x_0),$$

$$\hat{q}_i(x) = \hat{y}_{i-1} - a_i d_i \hat{y}_0 + a_i \int_{x_0}^{x} q_i(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\hat{y}_i = \hat{f}(x_i) = \hat{y}_0 + \sum_{n=1}^{i} a_n \left[d_n(\hat{y}_N - \hat{y}_0) + \int_{x_0}^{x_N} q_n(t)\,\mathrm{d}t \right],$$

$$\hat{y}_N = \hat{y}_0 + \frac{\sum_{n=1}^{N} a_n \int_{x_0}^{x_N} q_n(t)\,\mathrm{d}t}{1 - \sum_{n=1}^{N} a_n d_n}.$$

证明 由 (5.4.2) 式定义，得

$$\begin{aligned}\hat{f}(L_i(x)) &= \left(\hat{y}_0 + \int_{x_0}^{x_{i-1}} f(t)\,\mathrm{d}t\right) + \int_{x_{i-1}}^{L_i(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \hat{y}_{i-1} + a_i \int_{x_0}^{x} f(L_i(t))\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{5.4.3}$$

由 (5.1.6)，

$$f(L_i(t)) = d_i f(t) + q_i(t), \quad \forall t \in [x_0, x_N].$$

于是

$$\begin{aligned}\hat{f}(L_i(x)) &= \hat{y}_{i-1} + a_i \int_{x_0}^{x} (d_i f(t) + q_i(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \hat{y}_{i-1} + a_i d_i(\hat{f}(x) - \hat{y}_0) + a_i \int_{x_0}^{x} q_i(t)\,\mathrm{d}t \\ &= a_i d_i \hat{f}(x) + \hat{y}_{i-1} - a_i d_i \hat{y}_0 + a_i \int_{x_0}^{x} q_i(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \hat{F}_i(x, \hat{f}(x)).\end{aligned}$$

从而

$$\hat{F}_i(x_0, \hat{y}_0) = \hat{F}_i(x_0, \hat{f}(x_0)) = \hat{f}(L_i(x_0)) = \hat{f}(x_{i-1}) = \hat{y}_{i-1},$$

$$\hat{F}_i(x_N, \hat{y}_N) = \hat{F}_i(x_N, \hat{f}(x_N)) = \hat{f}(L_i(x_N)) = \hat{f}(x_i) = \hat{y}_i.$$

又对于所有 $i = 1, 2, \ldots, N$，有 $|a_i d_i| \leqslant |a_i| < 1$ 并且 $\hat{q}_i(x)$ 连续，所以 $\{(L_i(x), \hat{F}_i(x, y))\}_{i=1}^N$ 构成一个分形插值函数系．又由

$$\hat{f}(L_i(x)) = \hat{F}_i(x, \hat{f}(x)),$$

可知 $\hat{f}$ 是由 $\{(L_i(x), \hat{F}_i(x, y))\}_{i=1}^N$ 所确定的分形插值函数．

在 (5.4.3) 式中令 $x = x_N$，得

$$\begin{aligned}\hat{y}_i = \hat{f}(L_i(x_N)) &= \hat{y}_{i-1} + a_i \int_{x_0}^{x_N} (d_i f(t) + q_i(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \hat{y}_{i-1} + a_i \left[d_i(\hat{y}_N - \hat{y}_0) + \int_{x_0}^{x_N} q_i(t)\,\mathrm{d}t \right],\end{aligned}$$

通过递归，我们可得

$$\hat{y}_i = \hat{y}_0 + \sum_{n=1}^{i} a_n \left[d_n(\hat{y}_N - \hat{y}_0) + \int_{x_0}^{x_N} q_n(t)\,\mathrm{d}t \right].$$

在上式中，令 $i = N$，即得

$$\hat{y}_N = \hat{y}_0 + \frac{\sum_{n=1}^{N} a_n \int_{x_0}^{x_N} q_n(t)\,\mathrm{d}t}{1 - \sum_{n=1}^{N} a_n d_n}.$$

□

推论 5.3. 设 f 是由 (5.4.1) 确定的分形插值函数，又 $\hat{f}$ 是 $I = [x_0, x_N]$ 上的一个可微函数，则 $\hat{f}' = f$ 当且仅当 $\hat{f}$ 是某个 $\{(L_i(x),\ \hat{F}_i(x,y))\}_{i=1}^N$ 所确定的分形插值函数，其中 $\hat{F}_i(x,y) = \hat{d}_i y + \hat{q}_i(x)$，$\hat{d}_i = a_i d_i$，$\hat{q}_i' = a_i q_i$，$a_i = (x_i - x_{i-1})/(x_N - x_0)$.

证明 如果 $\hat{f}$ 满足 $\hat{f}' = f$，则必有 $\hat{f}(x) = \hat{f}(x_0) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 由定理 5.5，必要性成立.

下面证明充分性．设 $\hat{f}$ 是由 $\{(L_i(x), \hat{F}_i(x,y))\}_{i=1}^N$ 所确定的分形插值函数，记 $\hat{y}_i = \hat{f}(x_i)$，$i = 0, 1, \ldots, N$，则

$$\begin{aligned}\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1} &= \hat{F}_i(x_N, \hat{y}_N) - \hat{F}_i(x_0, \hat{y}_0) \\ &= \hat{d}_i(\hat{y}_N - \hat{y}_0) + \hat{q}_i(x_N) - \hat{q}_i(x_0) \\ &= a_i d_i(\hat{y}_N - \hat{y}_0) + a_i \int_{x_0}^{x_N} q_i(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

从而

$$\hat{y}_i = \hat{f}(x_i) = \hat{y}_0 + \sum_{n=1}^{i} a_n \left[d_n(\hat{y}_N - \hat{y}_0) + \int_{x_0}^{x_N} q_n(x)\,\mathrm{d}x \right].$$

在上式中令 $i = N$，可得

$$\hat{y}_N = \hat{y}_0 + \frac{\sum_{n=1}^{N} a_n \int_{x_0}^{x_N} q_n(x)\,\mathrm{d}x}{1 - \sum_{n=1}^{N} a_n d_n}.$$

又对于 $i = 1, 2, \ldots, N$，由 $\hat{q}_i' = a_i q_i$，必存在 $t_i \in \mathbb{R}$，使得 $\hat{q}_i(x) = t_i + a_i \int_{x_0}^{x} q_i(t)\,\mathrm{d}t$．因为

$$\hat{y}_{i-1} = \hat{F}_i(x_0, \hat{y}_0) = \hat{d}_i \hat{y}_0 + \hat{q}_i(x_0) = a_i d_i \hat{y}_0 + t_i,$$

所以 $t_i = \hat{y}_{i-1} - a_i d_i \hat{y}_0$，于是

$$\hat{q}_i(x) = \hat{y}_{i-1} - a_i d_i \hat{y}_0 + a_i \int_{x_0}^{x} q_i(t)\,\mathrm{d}t.$$

这样，我们证明了 $\hat{F}_i$ 与定理 5.5 中的形式完全一致，于是 $\hat{f}(x) = \hat{y}_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$，因此 $\hat{f}' = f$． □

例 5.4. 令 f 是过点 $(0,0), (1/4,1), (1/2,-1), (1,0)$ 的分形插值函数，且 $d_1 = d_2 = d_3 = 1/2$，它所对应的分形插值函数系为：

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{1}{4}x, & F_1(x,y) &= \frac{1}{2}y + x, \\ L_2(x) &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}, & F_2(x,y) &= \frac{1}{2}y - 2x + 1, \\ L_3(x) &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, & F_3(x,y) &= \frac{1}{2}y + x - 1. \end{aligned}$$

则 f 的图象如图 5.5 所示．

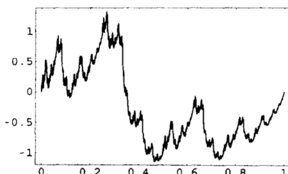


图 5.5　分形插值函数 f 的图象.

在 f 的积分函数 $\hat{f}$ 的表达式中，$\hat{y}_0$ 是可自由选择的，我们令 $\hat{y}_0=0$，则 $\hat{f}=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$．此时对应的 $\hat{y}_i$ 可由定理 5.5 求得．因为

$$1-\sum_{n=1}^{3} a_n d_n = 1-1/2 = 1/2,$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{3} a_n \int_0^1 q_n(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{4}\int_0^1 t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int_0^1(-2t+1)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^1(t-1)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{8},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\hat{y}_3 &= \hat{y}_0 + \frac{\sum_{n=1}^{3} a_n \int_0^1 q_n(t)\,\mathrm{d}t}{1-\sum_{n=1}^{3} a_n d_n} = \frac{-1/8}{1/2} = -\frac{1}{4}, \\ \hat{y}_1 &= \hat{y}_0 + a_1\left[d_1\hat{y}_3 + \int_0^1 q_1(t)\,\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) + \int_0^1 t\,\mathrm{d}t\right] = \frac{3}{32}, \\ \hat{y}_2 &= \hat{y}_1 + a_2\left[d_2\hat{y}_3 + \int_0^1 q_2(t)\,\mathrm{d}t\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{32} + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) + \int_0^1 (-2t+1)\,\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{16}.$$

因此，$\hat{f}$ 的插值点为 $(0,0), (1/4, 3/32), (1/2, 1/16), (1, -1/4)$.

对应的 $\hat{q}_i(x)$ 为

$$\begin{aligned}
\hat{q}_1(x) &= \hat{y}_0 - a_1 d_1 \hat{y}_0 + a_1 \int_0^x q_1(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_0^x t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}x^2,\\
\hat{q}_2(x) &= \hat{y}_1 - a_2 d_2 \hat{y}_0 + a_2 \int_0^x q_2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{32} + \frac{1}{4}\int_0^x (-2t+1)\,\mathrm{d}t\\
&= -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{32},\\
\hat{q}_3(x) &= \hat{y}_2 - a_3 d_3 \hat{y}_0 + a_3 \int_0^x q_3(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\int_0^x (t-1)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

利用公式 $F_i(x,y) = a_i d_i y + \hat{q}_i(x)$，可得

$$\begin{aligned}
\hat{F}_1(x,y) &= \frac{1}{8}y + \frac{1}{8}x^2,\\
\hat{F}_2(x,y) &= \frac{1}{8}y - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{32}.\\
\hat{F}_3(x,y) &= \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

图 5.6 显示了 $\hat{f} = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 的图象.

定理 5.6. 设 $x_0 < x_1 < \cdots < x_N$，$L_i(x)$ 是线性映射，满足

$$L_i(x_0) = x_{i-1}, \quad L_i(x_N) = x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

记 $a_i = (x_i - x_{i-1})/(x_N - x_0)$，$1 \leqslant i \leqslant N$. 设 $F_i(x,y) = d_i y + q_i(x)$，并且存在非负整数 n，满足 $|d_i| < a_i^n$, $q_i \in C^n[x_0, x_N]$，$i =$

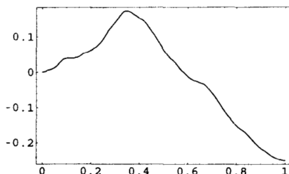


图 5.6 例 5.4 中的积分函数 $\hat{f}$

$1,2,\ldots,N$. 令

$$F_{i,k}(x,y)=\frac{d_iy+q_i^{(k)}(x)}{a_i^k}\ (\text{其中 } q_i^{(0)}=q_i),$$

$$y_{0,k}=\frac{q_1^{(k)}(x_0)}{a_1^k-d_1},\ \ y_{N,k}=\frac{q_N^{(k)}(x_N)}{a_N^k-d_N},\ \ k=1,2,\ldots,n. \tag{5.4.4}$$

如果对所有的 $i=2,3,\ldots,N$ 和 $k=1,2,\ldots,n$，都有

$$F_{i-1,k}(x_N,y_{N,k})=F_{i,k}(x_0,y_{0,k}),$$

那么由 $\{(L_i(x),F_i(x,y))\}_{i=1}^N$ 确定的分形插值函数 f 属于 $C^n[x_0,x_N]$ (区间 $[x_0,x_N]$ 上有 n 阶连续导数的函数全体)，并且 $f^{(k)}$ 是由 $\{(L_i(x),F_{i,k}(x,y))\}_{i=1}^N$ 确定的分形插值函数.

证明 由 (5.4.4) 式，可得

$$F_{1,k}(x_0,y_{0,k})=y_{0,k},\ \ F_{N,k}(x_N,y_{N,k})=y_{N,k}.$$

又因为对所有的 $i=2,3,\ldots,N$ 和 $k=1,2,\ldots,n$，有

$$F_{i-1,k}(x_N,y_{N,k})=F_{i,k}(x_0,y_{0,k}),$$

所以对于 $k=0,1,\ldots,n$，$\{(L_i(x),F_{i,k}(x,y))\}_{i=1}^N$ 确定了某个分形插值函数 g_k．应用推论 5.3，得到 $g'_{k-1}=g_k$，$k=1,2,\ldots,n$． □

例 5.5. 令 f 是过点 $(0,0),(1/2,1),(1,0)$ 的分形插值函数，它所对应的分形插值函数系为:

$$\begin{aligned} L_1(x) &= x/2, \qquad\quad F_1(x,y)=y/4+q_1(x),\\ L_2(x) &= x/2+1/2, \quad F_2(x,y)=y/4+q_2(x), \end{aligned}$$

其中 $q_1(x)=x$，$q_2(x)=-x+1$．则可证明 $f(x)=-4x^2+4x$，$x\in[0,1]$.

事实上，我们令

$$F_{i,1}(x,y)=\frac{d_iy+q'_i(x)}{a_i},\quad i=1,2,$$

$$y_{0,1}=\frac{q'_1(x_0)}{a_1-d_1},\quad y_{2,1}=\frac{q'_2(x_2)}{a_2-d_2},$$

其中 $d_1=d_2=1/4$，$a_1=a_2=1/2$，$x_0=0$，$x_1=1/2$，$x_2=1$．

经计算可得

$$F_{1,1}(x,y)=y/2+2,\ F_{2,1}(x,y)=y/2-2,\ y_{0,1}=4,\ y_{2,1}=-4,$$

并且有

$$F_{1,1}(x_2,y_{2,1})=F_{2,1}(x_0,y_{0,1}).$$

由定理 5.6 可知，$\{(L_i(x), F_{i,1}(x,y))\}_{i=1}^{2}$ 确定了一个分形插值函数 g，且 $f' = g$. 函数 g 通过节点 $(0,4),(1/2,0)$ 及 $(1,-4)$，且满足方程:

$$g\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}g(x) + 2, \quad g\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}g(x) - 2.$$

不难验证 $g(x) = -8(x - 1/2)$. 于是可得 $f(x) = -4x^2 + 4x$.

§ 5.5 递归分形插值函数

给定闭区间 $I = [a,b]$. 令 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ 是 I 的一个划分，其中 $N \geqslant 2$. 令 $y_0, y_1, \ldots, y_N$ 是任意一组实数. 对每个 $i = 1,2,\ldots,N$，令 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$，$D_i = [x_{l(i)}, x_{r(i)}]$，其中 $l(i), r(i) \in \{0,1,\ldots,N\}$ 且 $x_{r(i)} - x_{l(i)} > x_i - x_{i-1}$. 记 $K_i = I_i \times \mathbb{R}$，$K = I \times \mathbb{R}$.

对于 $i = 1,2,\ldots,N$，令 L_i 是 $D_i \to I_i$ 的一个压缩同胚，满足条件

$$L_i(x_{l(i)}) = x_{i-1}, \qquad L_i(x_{r(i)}) = x_i, \tag{5.5.1}$$

并且对某个 $0 < \alpha_i < 1$，

$$|L_i(u_1) - L_i(u_2)| \leqslant \alpha_i \cdot |u_1 - u_2|, \ \forall u_1, u_2 \in D_i. \tag{5.5.2}$$

令 F_i 是 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 的连续函数，满足条件

$$F_i(x_{l(i)}, y_{l(i)}) = y_{i-1}, \ F_i(x_{r(i)}, y_{r(i)}) = y_i, \tag{5.5.3}$$

并且对某个 $0 \leqslant q_i < 1$，

$$|F_i(u,v_1) - F_i(u,v_2)| \leqslant q_i \cdot |v_1 - v_2|, \ \forall u \in D_i, \ v_1, v_2 \in \mathbb{R}. \tag{5.5.4}$$

定义映射 $\omega_i : D_i \times \mathbb{R} \to I_i \times \mathbb{R}$ 为

$$\omega_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_i(x) \\ F_i(x,y) \end{pmatrix}. \tag{5.5.5}$$

我们注意到 (5.5.5) 与 (5.1.5) 很相似，如果令所有的 $l(i) = a, r(i) = b$，则 (5.5.5) 就是 (5.1.5). 这里 L_i 是将 I 的某个局部映射成区间 $[x_{i-1}, x_i]$，因此可以将 (5.5.5) 理解成分块分形插值函数系.

定义矩阵 $C = (C_{ij})_{N\times N}$ 如下，如果 $I_j \subset D_i$，则 $C_{ij} = 1$，不然 $C_{ij} = 0$. 我们称 C 为关联矩阵. 记 $\tau(i) = \{j | C_{ij} = 1\}$，显然有 $D_i = \cup_{j\in\tau(i)} I_j$.

记 $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}(K_1) \times \mathcal{H}(K_2) \times \cdots \times \mathcal{H}(K_N)$，这里 $\mathcal{H}(K_i)$ 是由 K_i 的所有非空紧子集组成的集合. 对 $\forall A = (A_1, A_2, \ldots, A_N) \in \widetilde{\mathcal{H}}$，我们定义

$$\begin{aligned} W \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} &\doteq \begin{pmatrix} C_{11}\omega_1 & \cdots & C_{1N}\omega_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N1}\omega_N & \cdots & C_{NN}\omega_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} \\ &\doteq \begin{pmatrix} \bigcup_{j=1}^N C_{1j}\omega_1(A_j) \\ \vdots \\ \bigcup_{j=1}^N C_{Nj}\omega_N(A_j) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{5.5.6}$$

其中对任意 $i, j = 1, 2, \ldots, N$，我们规定

$$C_{ij}\omega_i(A_j) = \begin{cases} \omega_i(A_j), & \text{如果 } C_{ij} = 1, \\ \varnothing, & \text{如果 } C_{ij} = 0. \end{cases}$$

不难看出，W 是 $\widetilde{\mathcal{H}}$ 到 $\widetilde{\mathcal{H}}$的映射.

对任意 I 上的连续函数 f，记 $G_i(f)=\{(x,f(x))|\,x\in I_i\}$. 我们有如下定理.

定理 5.7. 存在 I 上的连续函数 f，使得 $(G_1(f),G_2(f),\ldots,G_N(f))$ 是 W (由 (5.5.6) 式定义) 的不动点，并且满足 $f(x_i)=y_i$，$i=1,2,\ldots,N$. 我们称这样的 f 是由 $\{\omega_i,i=1,2,\ldots,N\}$ 确定的递归分形插值函数.

证明 记 $(C(I);|\cdot|_\infty)$ 是由 I 上全体连续函数构成的空间，其中对 $\forall g\in C(I)$，定义 $|g|_\infty=\max\{|g(x)||\,x\in I\}$. 则 $(C(I),|\cdot|_\infty)$ 是完备度量空间. 令 $C_0(I)=\{g\in C(I)|\,g(x_i)=y_i,\ i=1,2,\ldots,N\}$，则 $C_0(I)$ 是 $C(I)$ 的闭子集，从而 $(C_0(I),|\cdot|_\infty)$ 也是完备度量空间. 对 $\forall g\in C_0(I)$，定义 $C_0(I)$ 到 $C_0(I)$ 的映射 T:

$$(Tg)(x)=F_i(L_i^{-1}(x),g(L_i^{-1}(x))),\quad \text{如果 } x\in I_i.$$

由 (5.5.4) 中的假设，可以得到

$$|Th-Tg|_\infty\leqslant q\cdot|h-g|_\infty,$$

其中 $q=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\{q_i\}$. 因此 T 是 $(C_0(I),|\cdot|_\infty)$ 上的压缩映射，由 Banach 不动点原理，存在惟一的 $f\in C_0(I)$，使得 $Tf=f$. 即

$$F_i(L_i^{-1}(x),f(L_i^{-1}(x)))=f(x),\quad \text{如果 } x\in I_i.$$

于是对任意 $i=1,2,\ldots,N$，

$$\begin{aligned}G_i(f)&=\{(x,f(x))|\,x\in I_i\}=\{(x,F_i(L_i^{-1}(x),f(L_i^{-1}(x))))|\,x\in I_i\}\\&=\{(L_i(x),F_i(x,f(x)))|\,x\in D_i\}=\{\omega_i(x,f(x))|\,x\in D_i\}\end{aligned}$$

$$= \bigcup_{j:\, C_{ij}=1} \{\omega_i(x, f(x)) | \, x \in I_j\} = \bigcup_{j:\, C_{ij}=1} \omega_i(G_j(f))$$

$$= \bigcup_{j=1}^{N} C_{ij}\omega_i(G_j(f)).$$

此即为

$$\begin{pmatrix} G_1(f) \\ \vdots \\ G_N(f) \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} G_1(f) \\ \vdots \\ G_N(f) \end{pmatrix}$$

于是，我们证明了递归分形插值函数的存在性. □

在 $\widetilde{\mathcal{H}}$ 中定义度量 $\widetilde{h}$：对任意 $A = (A_1, \ldots, A_N)$，$B = (B_1, \ldots, B_N) \in \widetilde{\mathcal{H}}$，令

$$\widetilde{\mathcal{H}}(A, B) = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \{h(A_i, B_i)\},$$

其中 h 是 Hausdorff 度量. 类似于定理 5.2 的证明，我们可以得到

定理 5.8. 设 f 是由 (5.5.5) 确定的递归分形插值函数，记 $G^* = (G_1(f), G_2(f), \ldots, G_N(f))$，则对于任意 $A \in \widetilde{\mathcal{H}}$，有

$$\lim_{n \to \infty} \widetilde{h}(W^n(A), G^*) = 0.$$

从而递归分形插值函数是惟一的. □

如果在 (5.5.1) 和 (5.5.4) 中，所有的 $i = 1, 2, \ldots, N$，$L_i(x)$ 和 $F_i(x, y)$ 都取为线性函数，这种递归分形插值函数为递归仿射分形插值函数. 此时对任意 $(x, y) \in D_i \times \mathbb{R}$，

$$\omega_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{5.5.7}$$

下面讨论递归仿射分形插值函数的盒维数，我们有：

定理 5.9. 令 f 是由形如 (5.5.7) 的 $\{\omega_i, i=1,2,\dots,N\}$ 及关联矩阵 C 所确定的递归仿射分形插值函数. 记 $G=\mathrm{Graph}(f)$. 令 $S(d)$ 为对角矩阵 $\mathrm{diag}\{|d_1|\cdot {a_1}^{d-1},\dots,|d_N|\cdot {a_N}^{d-1}\}$. 令 $Q=CS(1)$，并且设 $D(Q)$ 是对应于 Q 的有向图，它的非平凡强连通分支为 $<T^1>,<T^2>,\dots,<T^m>$. 对于 $i=1,2,\dots,m$, 设 C_i 以及 $S_i(d)$ 分别是对应于 $<T^i>$ 的 C 以及 $S(d)$ 的子矩阵，s_i 是满足 $\rho(C_iS_i(s_i))=1$ 的惟一实数. 则

$$\dim_B G=\max\{s_1,s_2,\dots,s_m,1\}.$$

在解释定理含义及叙述定理证明之前，我们首先介绍一些预备知识：非负矩阵、有向图和强连通分支的概念.

元素都是非负实数的方阵 A 称为非负元素方阵，简称非负方阵. n 阶非负方阵 A 的谱半径定义为 $\rho(A)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_i|$，其中 $\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}$ 是 A 的 n 个特征值.

对于每个 n 阶非负方阵 $A=(a_{ij})$，我们可以将它与一个有向图 $D(A)$ 相对应：(1) $D(A)$ 有 n 个顶点 $V_1,\dots,V_n$；(2) 当 $a_{ij}>0$ 时，我们称存在从 V_j 到 V_i 的弧 $\overline{V_jV_i}$，并称 V_j 和 V_i 为这条弧的起点和终点.

例 5.6. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$，则有向图 $D(A)$ 表示为图 5.7.

对于任意 $i,j=1,2,\dots,N$，如果存在有序数列 $i=k_0,k_1,\dots,k_t=j$，使得 $a_{k_rk_{r+1}}>0$ 对所有 $r=0,1,\dots,t-1$ 成立，则称存

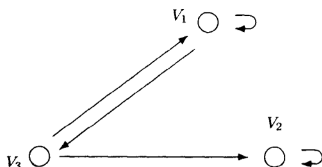


图 5.7 例 5.6 中所对应的有向图

在从 V_j 到 V_i 的路. 如果既有从 V_i 到 V_j 的路, 又有从 V_j 到 V_i 的路, 则称 V_i 和 V_j 是互通的. 如果 $D(A)$ 中的任意两个顶点互通, 则称有向图 $D(A)$ 是强连通的. 此时也称方阵 A 是不可约的.

评注 5.3. 按定义, V_i 和 V_i 是互通的, 当且仅当存在从 V_i 到 V_i 的路. 而 $D(A)$ 是强连通的其中一个要求是, 对于所有的 $i = 1, 2, \ldots, n$, V_i 和 V_i 是互通的.

对于不可约方阵, 有如下的 Perron-Frobenius 定理:

定理 5.10 (Perron-Frobenius 定理). 设 A 是 n 阶不可约非负方阵, 则

1° $\rho(A)$ 是 A 的正特征值;

2° $\rho(A)$ 作为 A 的 n^2 个元素的函数是严格递增的, 即若有 $B \neq A$, $B - A \geqslant 0$, 则 $\rho(B) > \rho(A)$;

3° $\rho(A)$ 是 A 的单根 (即有且仅有 A 的一个特征值等于 $\rho(A)$);

4° $\rho(A)$ 有正特征向量 z 与 $\rho(A)$ 相应，即 $z > 0$，$Az = \rho(A)z$. 而且 A 的任一非负特征向量一定是 z 的正数倍. □

如果 A 是可约方阵，即有向图 $D(A)$ 不是强连通的，我们可以按照如下的方法定义 $D(A)$ 的强连通分支.

设 $D(A)$ 的顶点集为 V，$T \subset V$，定义 $D(A)$ 的子图 $<T>$ 为：$<T>$ 的顶点集是 T，$<T>$ 的弧是 $D(A)$ 的弧在 T 上的限制.

例 5.7. A 同上例，取 $T = \{V_1, V_3\}$，则 $<T>$ 如图 5.8 表示.

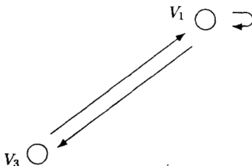


图 5.8 有向图 $<T>$.

对于 V 的一个子集 T，如果 $<T>$ 中任意两个元素互通，称 $<T>$ 是 $D(A)$ 的强连通部分. 进一步，对于 $D(A)$ 的一个强连通部分 $<T>$，如果不存在 $D(A)$ 的强连通部分 $<T'>$，使得 $T' \supset T$ 且 $T' \neq T$，则称 $<T>$ 是 D 的一个强连通分支. 例如，例 5.6 中的 $<\{V_1, V_3\}>$ 是强连通分支，$<\{V_1\}>$ 是强连通部分.

接下来，我们给出定理 5.9 的证明思路 (完整的证明请参阅文献 [38]).

令 f 是由形如 (5.5.7) 的 $\{\omega_i, i = 1,2,\ldots,N\}$ 及关联矩阵 C 所确定的递归仿射分形插值函数．令 $S(d)$ 为对角矩阵 $\mathrm{diag}\{|d_1|\cdot|a_1|^{d-1},\ldots,|d_N|\cdot|a_N|^{d-1}\}$．记 $Q = CS(1)$，令 $D(Q)$ 是对应的有向图．$D(Q)$ 的顶点集为 $V = \{V_1, V_2, \ldots, V_N\}$．设 $<T^1>$, $<T^2>$, $\ldots, <T^r>$ 是 $D(Q)$ 的所有强连通分支，其中 $<T^i>$ 的顶点集为 $T^i = \{V_{i(1)}, V_{i(2)}, \ldots, V_{i(t_i)}\}$，$i = 1,2,\ldots,r$．记

$$C_i = C[i(1), i(2), \ldots, i(t_i)|\, i(1), i(2), \ldots, i(t_i)],$$

$$S_i(d) = S(d)[i(1), i(2), \ldots, i(t_i)|\, i(1), i(2), \ldots, i(t_i)], \quad \forall d \in \mathbb{R},$$

其中对任意的矩阵 A，$A[i(1), i(2), \ldots, i(t_i)|\, j(1), j(2), \ldots, j(t_j)]$ 表示由 A 中 $i(1)$, $i(2)$, $\ldots$, $i(t_i)$ 共 t_i 行，$j(1)$, $j(2)$, $\ldots$, $j(t_j)$ 共 t_j 列按顺序排列后组成的 $t_i \times t_j$ 子矩阵．由 Perron-Frobenius 定理，我们可以证明存在惟一的 $s_i \in \mathbb{R}$，使得 $\rho(C_i S_i(s_i)) = 1$．

$\forall i = 1,2,\ldots,N$，记 $E_i = \{i\} \cup \{j|$ 存在从 V_j 到 V_i 的路$\}$．若任意 $j \in E_i$，$\{(x_k, y_k)|\, x_k \in D_j\}$ 在同一直线上，则称 V_i 为平凡的，不然称 V_i 为非平凡的．显然，若 V_i 为非平凡的，则与其互通的顶点都是非平凡的．假设强连通分支中的顶点都是非平凡的，则称该强连通分支为非平凡的，不然称其为平凡的．我们不妨假设 $<T^1>, <T^2>, \ldots, <T^m>$ $(m \leqslant r)$ 是 $D(Q)$ 的所有非平凡强连通分支，令 G_i 是 G 限制在 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ 上的部分，同证明自仿射分形插值函数的盒维数公式一样，我们定义 $\mathcal{N}^*(\varepsilon) = \min\{\#\Psi|\, \Psi$ 是 G 的 ε 柱覆盖$\}$，定义 $\mathcal{N}_i^*(\varepsilon) = \min\{\#\Psi|\, \Psi$ 是 G_i 的 ε 柱覆盖$\}$．于是

$$\overline{\dim}_B G = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \overline{\dim}_B G_i = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{\log \mathcal{N}_i^*(\varepsilon)}{-\log \varepsilon},$$

$$\underline{\dim}_B G \geqslant \max_{1\leqslant i\leqslant N} \underline{\dim}_B G_i = \max_{1\leqslant i\leqslant N} \varliminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\log \mathcal{N}_i^*(\varepsilon)}{-\log\varepsilon}.$$

类似于 (5.2.4)，(5.2.5) 和引理 5.3，我们有下面的两个引理.

引理 5.6. 对于 $i=1,2,\ldots,N$，存在常数 $\eta_i,\zeta_i>0$，使得对任意 $0<\varepsilon<x_N-x_0$，有

$$\frac{|d_i|}{a_i}\sum_{j\in\tau(i)}\mathcal{N}_j^*(\varepsilon/a_i)-\frac{\eta_i}{\varepsilon}\leqslant \mathcal{N}_i^*(\varepsilon)\leqslant \frac{|d_i|}{a_i}\sum_{j\in\tau(i)}\mathcal{N}_j^*(\varepsilon/a_i)+\frac{\zeta_i}{\varepsilon}.$$

引理 5.7. 对于非负矩阵 $Q=CS(1)$，设 $D(Q)$ 为 Q 所对应的有向图，$<T^i>$ 为 $D(Q)$ 的非平凡强连通分支，Q_i 为对应于$<T^i>$ 的子矩阵. 假设 $\lambda_i=\rho(Q_i)>1$，那么

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\mathcal{N}_j^*(\varepsilon)=\infty,\quad \forall j=i(1),\ldots,i(t_i).$$

由这两个引理以及 Perron-Frobenius 定理，我们可利用递推的方法证明下面两个性质

1° 存在 i，使得 $\underline{\dim}G_i\geqslant\max\{s_1,s_2,\ldots,s_m,1\}$.

2° 对于任意的 i，都有 $\overline{\dim}G_i\leqslant\max\{s_1,s_2,\ldots,s_m,1\}$.

从而定理 5.9 成立.

例 5.8. 如图 5.9，令 $x_i=i/4$，$i=0,1,\ldots,4$ 是 $[0,1]$ 的一个划分，$\{(x_i,y_i)_{i=0}^3\}$ 共线，$\{(x_i,y_i)_{i=2}^4\}$ 不共线. 令 $D_1=D_4=[x_2,x_4]$，$D_2=[x_1,x_3]$，$D_3=[x_0,x_2]$. 令 $d_1=d_4=0$，$d_2=d_3=t\in(0,1)$. 由构造可以看出，递归分形插值函数的图象 G 是过 $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^4$ 的一条折线，所以 $\dim_B G=1$. 下面我们说明如何用定理 5.9 来求 G 的盒维数.

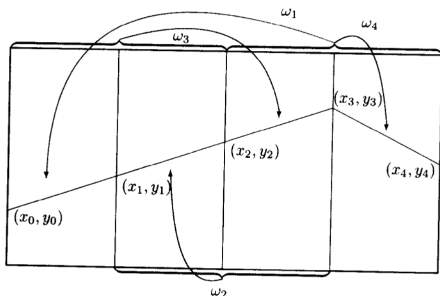


图 5.9 递归仿射分形插值函数

由上，关联矩阵 C 为:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

由 C 确定的有向图可表示为图 5.10. 又 $S(1) = \mathrm{diag}\{0, t, t, 0\}$，于

是

$$Q = CS(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & t & t & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

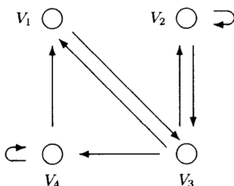


图 5.10 C 所对应的有向图

显然，$D(Q)$ 仅有一个强连通分支 $<T^1>= \{V_2, V_3\}$，且 $E_2 = E_3 = \{2, 3\}$. 因为

$$\{(x_i, y_i)|\, x_i \in D_2\} = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{3}, \quad \{x_i, y_i|\, x_i \in D_3\} = \{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{2}$$

都是共线的，所以 $D(Q)$ 仅有的强连通分支 $<T^1>$ 是平凡的. 于是由定理 5.9 可得，$\dim_B G = 1$.

由定理 5.9，**我们可得如下推论**.

推论 5.4. 令 f 是由形如 (5.5.7) 的 $\{\omega_i|\, i = 1, 2, \ldots, N\}$ 及关联矩阵 C 所确定的递归仿射分形插值函数. 记 $G = \mathrm{Graph}(f)$. 令

$S(d)$ 为对角矩阵 $\mathrm{diag}\{|d_1|\cdot|a_1|^{d-1},\ldots,|d_N|\cdot|a_N|^{d-1}\}$. 假设 $CS(1)$ 是不可约矩阵, 令 s 是使得 $\rho(CS(s))=1$ 的惟一值. 我们有:

如果 $\rho(CS(1))>1$ 并且存在某个 $k\in\{1,\ldots,N\}$ 使得 $\{(x_i,y_i)|x_i\in D_k\}$ 不共线, 那么 $\dim_B(G)=s$, 不然 $\dim_B(G)=1$. □

评注 5.4. 如果把推论中的条件"$CS(1)$ 是不可约矩阵"改为"C 是不可约矩阵", 那么推论的结论就不成立. 例 5.8 就是一个反例. 事实上由图 5.10 可知, 此时有向图 $D(C)$ 是强连通的, 从而 C 是不可约矩阵. 容易求得 $\rho(CS(1))=(\sqrt{5}+1)t/2$, $\rho(CS(d))=(\sqrt{5}+1)t\cdot(1/2)^{d-1}$. 于是, 如果取 $t\in((\sqrt{5}-1)/2,1)$, 那么满足 $\rho(CS(s))=1$ 的 s 取值为 $\log_{1/2}\dfrac{\sqrt{5}-1}{2t}+1>1$, 并且 $\{(x_i,y_i)|x_i\in D_1\}=\{(x_i,y_i)\}_{i=2}^4$ 不共线. 所以, 如果把推论中的条件"$CS(1)$ 是不可约矩阵"改为"C 是不可约矩阵", 那么此时就有 $\dim_B G=s>1$. 但实际上, $\dim_B G=1$.

第六章　分形插值拟合

区间上的函数 ϕ，即使是连续的，往往也是非常复杂，因此无论在理论上，还是应用上总希望用一些较简单的函数来替代它．最简单的是多项式函数 $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$．当然我们必须研究它们之间的误差有多大，也就是要估计 $|\phi - p|_\infty$ 的大小，该值越小，这种替代就越成功．

由逼近论中的 Weierstrass 定理知，对任意的 $\varepsilon > 0$，总存在代数多项式 p，满足不等式

$$|\phi - p|_\infty < \varepsilon.$$

但是由于计算不稳定，多项式在应用中不是一个好的逼近工具．

目前在实际应用中使用最广泛的是样条函数，它是一种优良的逼近方法．在第五章开头我们指出分形插值法是样条的一种推广，因此分形插值应当是一种更为出色的拟合工具．

首先分形插值函数也能任意逼近给定的连续函数 ϕ，这只要注意到在 § 5.1 中讨论过的自仿射分形插值函数，当它的所有纵向尺度因子 d_i 全部等于 0 时，分形插值函数就是顺次连接插值点列的折

线，于是只要区间 $[a,b]$ 上的分划点列 $\{x_i\}_{i=0}^N$ 分布得足够稠密，那么分形插值曲线与 ϕ 可以任意接近.

作为逼近工具，我们要讨论如下两个问题：

1° 给定目标函数 ϕ，设 f 是它的某个分形插值函数，那么 $|f-\phi|_\infty$ 有多大?

2° 给定目标函数 ϕ，在一定的条件下，如何构造它的分形插值函数 f，使得 $|f-\phi|_\infty$ 达到最小?

问题 2° 与第四章中讨论的问题很类似，在那里是对于给定的一幅图象，如何选择参数，用 LIFS 拼贴法去重构．对于分形插值函数，区间 $[a,b]$ 的分割点列 $\{x_i\}$ 及纵向尺度因子 $\{d_i\}$ 都可以作为参数，这种优化问题是非常复杂的．通常我们总让 $\{x_i\}$ 固定 (例如选取区间等距的分点)，寻找最优的 $\{d_i\}$.

如何用自仿射分形插值函数或递归仿射分形插值函数有效地拟合给定的函数或离散数据，是一个很有价值并且仍在探讨的问题．我们给出了两种求解问题 2° 的方法．在本章中我们只是讨论了如何用自仿射或递归仿射分形插值函数拟合给定函数的问题，但通过适当的改进，可以将方法移植到离散数据的拟合中去.

§6.1 一类函数方程

在第三章的最后曾引入了码空间 Ω，这里对它略作修改，但仍用记号 Ω 表示.

$$\Omega=\{\omega=(i_1,i_2,\ldots,i_k,\ldots,)\,|\,i_k\in\{0,1,\ldots,N-1\}\}.$$

对于 $\omega=(i_1,i_2,\ldots)$ 和 $\widetilde{\omega}=(\widetilde{i}_1,\widetilde{i}_1,\ldots)\in\Omega$，用下式表示它们之间的距离，

$$|\omega-\widetilde{\omega}|\doteq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|i_k-\widetilde{i}_k|}{N^k},$$

这样 Ω 成为一个紧度量空间.

设 $\omega=(i_1,i_2,\ldots,i_k,\ldots)\in\Omega$，如果 $i_k=0,\forall k\geqslant n+1$，那么记 $\omega=(i_1,\ldots,i_n,\dot{0})$. 另外，如果 $i_k=N-1,\forall k\geqslant n+1$，那么记 $\omega=(i_1,\ldots,i_n,\dot{N-1})$.

定义移位算子 $\sigma:\Omega\to\Omega$，设 $\omega=(i_1,i_2,i_3,\ldots,)$，则

$$\sigma\omega=(i_2,i_3,\ldots).$$

移位算子 σ 的 k 次复合，记为 σ^k，则有

$$\sigma^k\omega=(i_{k+1},i_{k+2},\ldots).$$

定义映射 $\psi:\Omega\to[0,1]$，如果 $\omega=(i_1,i_2,\ldots,i_k,\ldots)$，则

$$\psi(\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i_k}{N^k}. \tag{6.1.1}$$

将 $\psi(\omega)$ 简记作 ψ_ω. 记

$$C_0[0,1]=\{f\in C[0,1]|f(0)=f(1)=0\},$$

$$|f|_\infty=\max_{x\in[0,1]}|f(x)|.$$

现在我们要在 $(C_0[0,1];|\cdot|_\infty)$ 空间中讨论下面的一类函数方程:

$$L(\psi_\omega)=\sum_{j=1}^{\infty}a_jL(\psi_{\sigma^j\omega})+f(\psi_\omega),\quad f\in C_0[0,1], \tag{6.1.2}$$

其中 $\{a_j\}$ 是一个给定的实数列，$f \in C_0([0,1])$.

记

$$\begin{cases} A_1 = a_1, \\ A_2 = a_1 A_1 + a_2, \\ \quad \vdots \\ A_{m-1} = a_1 A_{m-2} + a_2 A_{m-3} + \cdots + a_{m-1}. \end{cases} \tag{6.1.3}$$

定理 6.1. 如果 $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty$，$\sum_{j=1}^{\infty} |A_j| < \infty$，则方程 (6.1.2) 在 $C_0[0,1]$ 中有惟一解 L:

$$L(\psi_\omega) = f(\psi_\omega) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k f(\psi_{\sigma^k \omega}), \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{6.1.4}$$

证明 当 $\omega = (i_1, i_2, \ldots, i_k, \dot{0})$ 时，为方便，用记号 $[i_1, \ldots, i_k]$ 来表示 ψ_ω，又用记号 $f[i_1, \ldots, i_k]$ 来代替 $f(\psi_\omega)$. 现在我们用归纳法证明，若 L 是方程 (6.1.2) 的解，则下式成立:

$$L[i_1, \ldots, i_k] = f[i_1, \ldots, i_k] + \sum_{j=1}^{k-1} A_j f[i_{j+1}, \ldots, i_k]. \tag{6.1.5}$$

事实上，容易看出

$$L[i_1] = f[i_1], \quad L[i_1, i_2] = f[i_1, i_2] + a_1 f[i_2].$$

现假定 (6.1.5) 式当 $k \leqslant m$ 时都是成立的，则有

$$L[i_1, i_2, \ldots, i_m, i_{m+1}] = f[i_1, \ldots, i_{m+1}] + \sum_{j=1}^{m} a_j L[i_{j+1}, \ldots, i_{m+1}]$$

$$= f[i_1, \ldots, i_{m+1}] + \sum_{j=1}^{m} a_j \Bigg\{ f[i_{j+1}, \ldots, i_{m+1}]$$

$$+\sum_{\ell=1}^{m-j} A_\ell f[i_{j+\ell+1},\ldots,i_{m+1}]\Bigg\}$$

$$=f[i_1,\ldots,i_{m+1}]+\sum_{j^*=1}^{m}\left\{a_{j^*}+\sum_{j=1}^{j^*-1}a_jA_{j^*-j}\right\}f[i_{j^*+1},\ldots,i_{m+1}]$$

$$=f[i_1,\ldots,i_{m+1}]+\sum_{j=1}^{m}A_jf[i_{j+1},\ldots,i_{m+1}].$$

于是 (6.1.5) 式成立.

现计算

$$\sum_{j=1}^{m-1}A_jf[i_{j+1},\ldots,i_m]-\sum_{j=1}^{\infty}A_jf(\psi_{\sigma^j\omega})$$

$$=\sum_{j=1}^{[m/2]}A_j\{f[i_{j+1},\ldots,i_m]-f(\psi_{\sigma^j\omega})\}$$

$$+\sum_{j=[m/2]+1}^{m-1}A_jf[i_{j+1},\ldots,i_m]-\sum_{j=[m/2]+1}^{\infty}A_jf(\psi_{\sigma^j\omega})$$

$$\doteq I_1+I_2-I_3.$$

注意到

$$|[i_{j+1},\ldots,i_m]-\psi_{\sigma^j\omega}|=\frac{1}{N^{m-j}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i_{m+k}}{N^k}\leqslant\frac{1}{N^{m-j}},$$

因此当 $j\leqslant[m/2]$，且当 $m\to\infty$ 时，上式将趋于 0.

由假设，f 是 $[0,1]$ 上的连续函数，因而有界，且级数 $\sum_{j=1}^{\infty}|A_j|$ 收敛. 于是当 $m\to\infty$ 时，I_1,I_2 和 I_3 都将趋于 0.

于是，若令 $k\to\infty$，由 (6.1.5) 式，就可得到 (6.1.4) 式. 这样我们证明了，如果 L 是方程 (6.1.2) 的解，则它一定有 (6.1.4) 的形式. 因此解是惟一的.

要完成定理的证明，还必须验证用 (6.1.4) 定义的函数 L 确实是方程 (6.1.2) 的解. 这只要将它直接代入方程两边，用类似于 (6.1.5) 式的证明方法，即可完成证明. □

定理 6.1 可以推广，考虑更一般的函数方程

$$L(\psi_\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(\omega) L(\psi_{\sigma^j \omega}) + f(\psi_\omega), \tag{6.1.6}$$

其中 $a_j(\omega): \Omega \to \mathbb{R}$，且满足条件：

$$\begin{aligned} &\forall\, \omega = (i_1, \ldots, i_k, \dot{0}), \quad \widetilde{\omega} = (i_1, \ldots, i_k - 1, N \dot{-} 1), \\ &\text{只要 } k > j, \text{ 就有 } a_j(\omega) = a_j(\widetilde{\omega}). \end{aligned} \tag{6.1.7}$$

记

$$\begin{cases} A_1(\omega) = a_1(\omega), \\ A_m(\omega) = \sum_{i=1}^{m-1} a_i(\omega) A_{m-i}(\sigma^i \omega) + a_m(\omega),\ m > 1. \end{cases} \tag{6.1.8}$$

定理 6.2. 设对 $\forall j$，$a_j(\omega) \in C(\Omega)$ 且满足条件 (6.1.7)，$f \in C_0[0,1]$，又假定级数 $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j(\omega)|$ 和 $\sum_{j=1}^{\infty} |A_j(\omega)|$ 都在 Ω 上一致收敛，则方程 (6.1.6) 在 $C_0[0,1]$ 中有惟一解 L:

$$L(\psi_\omega) = f(\psi_\omega) + \sum_{j=1}^{\infty} A_j(\omega) f(\psi_{\sigma^j \omega}), \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{6.1.9}$$

证明方法与定理 6.1 完全一样，所以在此从略. □

给定 $\{d_i\}_{i=0}^{N-1}$，$|d_i| < 1$，又 $\omega = (i_1, i_2, \ldots) \in \Omega$. 记

$$d_{\omega(j)} \doteq d_{i_1} d_{i_2} \cdots d_{i_j}. \tag{6.1.10}$$

考虑函数方程

$$L(\psi_\omega)=\sum_{j=1}^{\infty}d_{\omega(j)}L(\psi_{\sigma^j\omega})+f(\psi_\omega),\quad f\in C_0[0,1],\qquad(6.1.11)$$

该方程是方程 (6.1.6) 的一个特殊情况，它在下一节中要用到.

推论 6.1. 如果 $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant N-1}\{|d_i|\}<1/2$，则方程 (6.1.11) 在 $C_0[0,1]$ 中有惟一解

$$L(\psi_\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}d_{\omega(k)}f(\psi_{\sigma^k\omega})+f(\psi_\omega).\qquad(6.1.12)$$

证明 由公式 (6.1.8)，有

$$A_1(\omega)=d_{i_1},$$

$$A_2(\omega)=d_{i_1}A_1(\sigma\omega)+d_{i_1}d_{i_2}=2d_{i_1}d_{i_2}.$$

用归纳法，假设当 $k\leqslant m-1$ 时，成立等式 $A_k(\omega)=2^{k-1}d_{i_1}\cdots d_{i_k}$，计算

$$\begin{aligned}A_m(\omega)&=d_{i_1}A_{m-1}(\sigma\omega)+d_{i_1}d_{i_2}A_{m-2}(\sigma^2\omega)+\cdots\\&\quad+d_{i_1}d_{i_2}\cdots d_{i_{m-1}}A_1(\sigma^{m-1}\omega)+d_{i_1}\cdots d_{i_m}\\&=d_{i_1}\cdots d_{i_m}(2^{m-2}+2^{m-3}+\cdots+1+1)=2^{m-1}d_{i_1}\cdots d_{i_m}.\end{aligned}$$

于是可得对任意 k，有 $A_k(\omega)=2^{k-1}d_{\omega(k)}$.

由定理条件，可知 $\sum_{k=1}^{\infty}|d_{\omega(k)}|$，$\sum_{k=1}^{\infty}|2^{k-1}d_{\omega(k)}|$ 关于 ω 一致收敛，因此定理 6.2 的条件都满足. 证毕. □

另一种特殊形式的方程是

$$L(\psi_\omega)=d_{\omega(1)}L(\psi_{\sigma\omega})+f(\psi_\omega),\quad f\in C_0[0,1].\qquad(6.1.13)$$

不难验证，此时有 $A_m(\omega)=d_{\omega(m)}$，由定理 6.2 可得下述推论.

推论 6.2. 若 $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant N-1}|d_i|<1$，则方程 (6.1.13) 在 $C_0[0,1]$ 中有惟一解

$$L(\psi_\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}d_{\omega(k)}f(\psi_{\sigma^k\omega})+f(\psi_\omega). \tag{6.1.14}$$

例 6.1. 考虑函数方程

$$L(\psi_\omega)=dL(\psi_{\sigma\omega})+d^2L(\psi_{\sigma^2\omega})+f(\psi_\omega),\quad f\in C_0[0,1], \tag{6.1.15}$$

其中 $|d|<(\sqrt{5}-1)/2$.

易见，此时有 $A_1=d$，$A_2=2d^2$ 及 $A_k=\alpha_k d^k$，这里 α_k 是某常数. 利用 (6.1.3) 式可得关于 α_k 的差分方程:

$$\alpha_m=\alpha_{m-1}+\alpha_{m-2}.$$

解此方程可得

$$\alpha_m=\frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m-1}+\frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-1},\quad m\in\mathbb{N}.$$

由定理 6.1 可知，方程 (6.1.15) 的解是

$$\begin{aligned}L(\psi_\omega)\ =\ f(\psi_\omega)+\sum_{k=1}^{\infty}d^kf(\psi_{\sigma^k\omega})\cdot\Bigg\{&\frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\\&+\frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\Bigg\}.\end{aligned}$$

§ 6.2 分形插值误差

给定函数 $\phi \in C[0,1]$，设 ℓ 是通过 $(0,\phi(0))$ 和 $(1,\phi(1))$ 两点的直线，那么 $(\phi-\ell)\in C_0[0,1]$. 为此在本节中我们不妨假定 $\phi\in C_0[0,1]$. 仍采用 (5.3.2) 形式的分形插值函数系，但对区间 $[0,1]$ 采用等剖分割，又将 $q_i(x)$ 改写成 $q(L_i(x))$ 的形式，即

$$\begin{cases} L_i(x)=\dfrac{i}{N}+\dfrac{1}{N}x, \\ F_i(x,y)=d_iy+q(L_i(x)), \end{cases} \qquad i=0,1,\ldots,N-1. \tag{6.2.1}$$

由 (5.1.3) 中插值条件可知

$$F_i(0,0)=\phi(i/N),\quad F_i(1,0)=\phi((i+1)/N),$$

于是

$$q(i/N)=\phi(i/N),\qquad i=0,1,\ldots,N.$$

因此所选取的 q 只需满足在 $\{i/N\}_{i=0}^N$ 上插值于给定函数 ϕ. 例如可以取为多项式插值函数或样条插值函数，当然最简单实用的是取为逐次连接插值点列的分段线性函数 (见 § 6.3).

引理 6.1. 设 $q\in \mathrm{Lip}\,\alpha$，对 $\forall i$，$|d_i|<1$，又假设 f 是 (6.2.1) 所确定的分形插值函数. 记 $d=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant N-1}|d_i|$，那么

(i) 若 $\alpha=-\dfrac{\log d}{\log N}$，则 $\omega(f,t)=O(t^\alpha|\log t|)$，

(ii) 若 $\alpha\neq-\dfrac{\log d}{\log N}$，则 $f\in\mathrm{Lip}\,\beta$，其中 $\beta=\min\left\{\alpha,-\dfrac{\log d}{\log N}\right\}$.

证明 由定理条件 $q\in\mathrm{Lip}\,\alpha$，可知存在常数 $M>0$，使得

$$|q(L_i(x))-q(L_i(y))|\leqslant M|L_i(x)-L_i(y)|^\alpha=\frac{M}{N^\alpha}|x-y|^\alpha,$$

因此 $q(L_i(x)) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$．再由 §5.3 中的推论 5.2 直接可得引理的证明．$\square$

由引理可知，总存在 $0<\nu\leqslant 1$，使得

$$f \in \mathrm{Lip}\,\nu. \tag{6.2.2}$$

现在又回到第五章中的 (5.3.7) 式，这时有形式

$$f(L_i(x)) = d_i f(x) + q(L_i(x)), \quad x \in I=[0,1],\ i=0,1,\ldots,N-1. \tag{6.2.3}$$

设 $\omega=(i_1,i_2,\ldots)\in\Omega$，令 $x=\psi_\omega$ (由 (6.1.1) 式定义)，记 $i\omega \doteq (i,i_1,i_2,\ldots)$，则

$$L_i(x) = L_i(\psi_\omega) = \frac{i}{N} + \frac{1}{N}\psi_\omega = \psi_{i\omega}.$$

于是 (6.2.3) 可改写为

$$f(\psi_{i\omega}) = d_i f(\psi_{\sigma(i\omega)}) + q(\psi_{i\omega}), \quad i=0,1,\ldots,N-1.$$

可以将上面的方程组改写为一个方程：

$$f(\psi_\omega) = d_{\omega(1)} f(\psi_{\sigma\omega}) + q(\psi_\omega), \quad \omega\in\Omega. \tag{6.2.4}$$

这就是上节中的方程 (6.1.13)，于是可得下面的结论．

引理 6.2. 设对 $\forall i$，$|d_i|<1$，又设 f 是 (6.2.1) 所确定的分形插值函数，则有

$$f(\psi_\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{\omega(k)} q(\psi_{\sigma^k\omega}) + q(\psi_\omega). \tag{6.2.5}$$

由此可见，§6.1 中讨论的函数方程，可以看作是分形插值函数的一种推广.

定理 6.3. 给定函数 $\phi \in C_0[0,1]$. 设 f 是由 (6.2.1) 确定的分形插值函数，其中 $q \in C_0[0,1]$，$q \in \mathrm{Lip}\,\alpha$，$q(i/N) = \phi(i/N)$，$i = 0, 1, \ldots, N$，又 $0 \leqslant |d_i| < 1$，$\forall i$. 记

$$K(N,n) \doteq \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{i_k}{N^k} \,\Big|\, i_k \in \{0, 1, \ldots, N-1\} \right\}. \tag{6.2.6}$$

设 L^* 是方程

$$L(\psi_\omega) = 2q(\psi_\omega) + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} d_{\omega(j)} L(\psi_{\sigma^j \omega}) \tag{6.2.7}$$

的解.

令

$$\varepsilon(N,n) = \max\left\{ |L^*(x) - \phi(x) - q(x)| \,\big|\, x \in K(N,n) \right\}, \tag{6.2.8}$$

则有

$$|\phi(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon(N,n) + \omega(\phi, \frac{1}{N^n}) + \frac{M}{N^{\nu n}}, \tag{6.2.9}$$

这里 M 是与 n 无关的常数，ν 由 (6.2.2) 确定.

证明 任取 $x \in [0,1]$，必存在 $x^* \in K(N,n)$，使得 $|x - x^*| \leqslant 1/N^n$. 设 $\widetilde{L}^*$ 是方程

$$L(\psi_\omega) = 2q(\psi_\omega) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} d_{\omega(j)} L(\psi_{\sigma^j \omega})$$

的解. 由 §6.1 中的推论 6.1 可得

$$\widetilde{L}^*(\psi_\omega) = 2q(\psi_\omega) + \sum_{j=1}^{\infty} d_{\omega(j)} q(\psi_{\sigma^j \omega}).$$

由 (6.2.5)，有 $\widetilde{L}^* = f + q$. 容易验证对任何 $x \in K(N,n)$，都有 $L^*(x) = \widetilde{L}^*(x)$，因此 $L^*(x^*) = \widetilde{L}^*(x^*)$. 于是

$$\begin{aligned}\phi(x) - f(x) &= (\phi(x) - \phi(x^*)) + (\phi(x^*) + q(x^*)) \\ &\quad - (f(x^*) + q(x^*)) + (f(x^*) - f(x)) \\ &= (\phi(x) - \phi(x^*)) + (\phi(x^*) + q(x^*) - L^*(x^*)) \\ &\quad + (f(x^*) - f(x)).\end{aligned}$$

利用 (6.2.2) 式，可得

$$|\phi(x) - f(x)| \leqslant \omega(\phi, \frac{1}{N^n}) + \varepsilon(N,n) + \frac{M}{N^{\nu n}}.$$

□

另外我们注意到，由于 $\forall x \in K(N,n)$，都有 $L^*(x) = \widetilde{L}^*(x)$，由 (6.2.8) 可知，必有

$$|\phi - f|_\infty \geqslant \varepsilon(N,n).$$

推论 6.3. 在定理 6.3 的条件下，当 n 足够大时，有

$$|\phi - f|_\infty \approx \varepsilon(N,n). \tag{6.2.10}$$

在具体演算过程中，函数 L^* 的值可以按照

$$K(N,1) \to K(N,2) \to \cdots \to K(N,n)$$

逐次采用递推方法，容易求得.

例 6.2. 取 $\phi(x)=\sin(\pi x)$，$x\in[0,1]$. 令$N=2$，$x_0=1$，$x_1=1/2$，$x_2=1$. 令

$$q(x)=\begin{cases}2x, & x\in[0,1/2],\\ 2(1-x), & x\in(1/2,1].\end{cases}$$

又取 $d_0=0.2133$，$d_1=0.2137$. 计算可得

$$\varepsilon(2,2)\approx 0.0065,\quad \varepsilon(2,3)\approx 0.022,\quad \varepsilon(2,4)\approx 0.022.$$

利用计算机计算得 $|\phi-f|_\infty\approx 0.023$.

例 6.3. 令 $\phi(x)=64x(x-1/4)(x-3/4)(x-1)$，$x\in[0,1]$. 取 $N=2$，$x_0=0$，$x_1=1/2$，$x_2=1$. $q(x)$ 与例 6.2 中相同. 取四种不同的 $\{d_i\}$，分别计算 $\varepsilon(N,n)$，见表 6.1.

表 6.1 例 6.3 的计算结果

d_0	-0.3510	0.2540	0.2133	-0.1254
d_1	-0.3510	0.3410	0.2137	0.4706
$\varepsilon(2,2)$	0.1490	0.8410	0.7137	0.9076
$\varepsilon(2,3)$	0.7446	1.0837	0.9494	1.1668
$\varepsilon(2,4)$	0.7446	1.0837	0.9494	1.1668
$\varepsilon(2,5)$	0.7446	1.1073	0.9569	1.1668
$\varepsilon(2,6)$	0.7446	1.1073	0.9608	1.1668
$\|\phi-f\|_\infty$	0.7446	1.1094	0.9612	1.1668

评注 6.1. §6.1 和 §6.2 中都是在等距分划的情况下进行讨论的. 事实上，对于不等距的分划，同样可以研究，并且结果完全类

似. 只要引进一个适当的变换 $\Phi: \Omega \to I$, 证明完全可以类似地进行, 详细过程在此从略. 有兴趣的读者可参阅文献 [42].

§6.3 分形插值拟合(一)

记 $I = [0,1]$, 给定目标函数 $\phi \in C(I)$, 令 $x_i = i/N$, $i = 0,1,\ldots,N$. 取 h_ϕ 为逐次连接 $\{(x_i,\phi(x_i))\}_{i=0}^N$ 的分段线性函数, b_ϕ 是经过 $(x_0,\phi(x_0))$ 与$(x_N,\phi(x_N))$ 两点的线性函数. 构造函数系:

$$\begin{cases} L_i(x) = \dfrac{x}{N} + \dfrac{i}{N}, \\ F_i(x,y) = d_i y + h_\phi(L_i(x)) - d_i b_\phi(x), \end{cases} \qquad i = 0,1,\ldots,N-1, \tag{6.3.1}$$

其中 $|d_i| < 1$, $\forall i$.

注意到

$$F_i(0,\phi(0)) = d_i\phi(0) + h_\phi\left(\frac{i}{N}\right) - d_i b_\phi(0) = \phi\left(\frac{i}{N}\right),$$

$$F_i(1,\phi(1)) = d_i\phi(1) + h_\phi\left(\frac{i+1}{N}\right) - d_i b_\phi(1) = \phi\left(\frac{i+1}{N}\right).$$

可知 (5.1.1)-(5.1.4) 的条件满足. 因此 (6.3.1) 是 ϕ 的一个分形插值函数系, 用 f 表示由它确定的分形插值函数.

本节要讨论的是下面的问题: 当 N 给定时, 如何选择纵向尺度因子 $\{d_i\}$, 使得 f 与目标函数 ϕ 之间距离 (在某种度量下) 最小.

定理 6.4. 设 f 是由 (6.3.1) 确定的分形插值函数, 则有

$$f(\psi_\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} d_{\omega(j)}(h_\phi - b_\phi)(\psi_{\sigma^j\omega}) + h_\phi(\psi_\omega), \tag{6.3.2}$$

其中 ψ_ω 由 (6.1.1) 定义，σ 是移位算子.

证明 由 (5.1.6) 和 (6.3.1)，我们可知对于 $x \in I_i$，有

$$\begin{aligned} f(x) &= F_i(L_i^{-1}(x), f(L_i^{-1}(x))) \\ &= d_i f(L_i^{-1}(x)) - d_i b_\phi(L_i^{-1}(x)) + h_\phi(x). \end{aligned}$$

令 $\omega \in \Omega$，可将上式改写为

$$f(\psi_\omega) = d_{\omega(1)} f(\psi_{\sigma\omega}) - d_{\omega(1)} b_\phi(\psi_{\sigma\omega}) + h_\phi(\psi_\omega).$$

利用递推，我们可得

$$\begin{aligned} f(\psi_\omega) = d_{\omega(m)}(f - b_\phi)(\psi_{\sigma^m\omega}) + \\ + \sum_{j=1}^{m-1} d_{\omega(j)}(h_\phi - b_\phi)(\psi_{\sigma^j\omega}) + h_\phi(\psi_\omega). \end{aligned}$$

注意到 $|d_i| < 1$ 对所有的 i 成立，令 $m \to \infty$，即得命题. □

对于 $m \geqslant 1$，在 $C(I)$ 中定义算子 H_m 如下.

$$H_m(g)(\psi_\omega) = h_g(\psi_\omega) + \sum_{j=1}^{m} d_{\omega(j)}(h_g - b_g)(\psi_{\sigma^j\omega}), \quad \forall g \in C(I), \tag{6.3.3}$$

其中 h_g,b_g 两函数的构造方法，与 (6.3.1) 中的 h_ϕ,b_ϕ 一样. 显然 H_m 是 $C(I)$ 到 $C(I)$ 的映射，并且对任意 $g \in C(I)$，有

$$H_m(g)(x_i) = g(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, N.$$

设 $|\cdot|_\infty$，$|\cdot|_2$ 分别是定义在 $C(I)$ 上的最大模范数和平方根范数，即

$$|g|_\infty = \max_{x \in I} |g(x)|, \quad \forall g \in C(I),$$

$$|g|_2 = \left(\int_I (g(x))^2 \, \mathrm{d}x\right)^{1/2}, \quad \forall g \in C(I).$$

定理 6.5. 给定目标函数 $\phi \in C(I)$，设 f 是由 (6.3.1) 确定的分形插值函数. 对于任意给定的正整数 m，令 H_m 是由 (6.3.3) 确定的插值算子. 令 $d = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant N-1} |d_i|$，则

$$|\phi - f|_i \leqslant |\phi - H_m(\phi)|_i + \frac{d^{m+1}}{1-d}|h_\phi - b_\phi|_i, \quad i = \infty, 2. \qquad (6.3.4)$$

证明 利用 (6.3.2) 和 (6.3.3)，可得

$$(H_m(\phi) - f)(\psi_\omega) = -\sum_{j=m+1}^{\infty} d_{\omega(j)}(h_\phi - b_\phi)(\psi_{\sigma^j \omega}),$$

所以

$$\begin{aligned} |\phi - f|_\infty &\leqslant |\phi - H_m(\phi)|_\infty + |H_m(\phi) - f|_\infty \\ &\leqslant |\phi - H_m(\phi)|_\infty + \frac{d^{m+1}}{1-d}|h_\phi - b_\phi|_\infty. \end{aligned}$$

这就证明了当 $i = \infty$ 时 (6.3.4) 式成立. 下面证明当 $i = 2$ 时也成立.

对任意自然数 j，记 $d_{i_1 \dots i_j} = d_{i_1} \cdots d_{i_j}$，$I_{i_1 \dots i_j} = L_{i_1} \circ L_{i_2} \circ \cdots \circ L_{i_j}(I)$，其中 $0 \leqslant i_1, \dots, i_j \leqslant N-1$. 记

$$p_j(x) = d_{i_1 \dots i_j}(h_\phi - b_\phi)\left(L_{i_j}^{-1} \circ L_{i_{j-1}}^{-1} \circ \cdots \circ L_{i_1}^{-1}(x)\right), \quad \forall x \in I_{i_1 \dots i_j}.$$

则 $(H_m(\phi) - f)(x) = -\sum_{j=m+1}^{\infty} p_j(x)$，且

$$|p_j|_2 = \left(\int_I (p_j(x))^2 \, \mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_j \leqslant N} \int_{I_{i_1 \cdots i_j}} (p_j(x))^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2}$$

$$\leqslant d^j \left(\sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_j \leqslant N} \int_I ((h_\phi - b_\phi)(x))^2 \, \mathrm{d}(L_{i_1} \circ L_{i_2} \circ \cdots \circ L_{i_j}(x)) \right)^{1/2}$$

$$\leqslant d^j \left(\sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_j \leqslant N} N^{-j} \int_I ((h_\phi - b_\phi)(x))^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2} = d^j |h_\phi - b_\phi|_2.$$

于是

$$\begin{aligned} |\phi - f|_2 &\leqslant |\phi - H_m(\phi)|_2 + |H_m(\phi) - f|_2 \\ &\leqslant |\phi - H_m(\phi)|_2 + \sum_{j=m+1}^{\infty} |p_j|_2 \\ &\leqslant |\phi - H_m(\phi)|_2 + \frac{d^{m+1}}{1-d} |h_\phi - b_\phi|_2. \end{aligned}$$

□

由于 $d < 1$，因此当 m 足够大时，由定理 6.5 可知，ϕ 与 f 的偏差可以由 ϕ 与 $H_m(\phi)$ 的偏差来近似代替．于是，我们只要选择这样的 $\{d_i\}$，使 ϕ 与 $H_m(\phi)$ 的偏差尽可能小，这就是我们的算法基础．这与第四章中拼贴定理的应用很相似．

设 $K(N,n)$ 由 (6.2.6) 式定义，我们将定理 6.5 中的平方根度量换为离散的平方根度量 $|\cdot|_{K(N,n)}$：

$$|g|_{K(N,n)} = \left\{ \frac{1}{N^n + 1} \sum_{x \in K(N,n)} (g(x))^2 \right\}^{1/2}, \quad \forall g \in C(I), \quad (6.3.5)$$

则上述逆问题可转化为求下面优化问题的解:

$$\min_{\substack{\{d_i\} \\ |d_i|<1}} |\phi - H_m(\phi)|_{K(N,n)}.$$

易见当 $n \geqslant 3$ 时，上述优化问题关于 $\{d_i\}$ 是非线性的，我们采用阻尼最小二乘法求解.

在下面的表 6.2 中，我们用 $|\cdot|_{\mathrm{mean}}$ 表示离散的平方根度量 $|\cdot|_{K(N,n)}$，用 $|\cdot|_{\max}$ 分别表示离散的最大模度量，即

$$|g|_{\max} = \max_{x\in K(N,n)} |g(x)|, \quad \forall g \in C(I).$$

例 6.4. 令 $\phi(x) = \sin(3.14x)$，$x \in [0,1]$. 用上面所讲的算法求 $\{d_i\}$，可得计算结果如表 6.2. 此外，图 6.1 的左边是 ϕ 的图象，右边是 $n=4, N=2$ 时的分形插值函数的图象.

表 6.2 例 6.4 的计算结果

n	2		3		4	
N	2	4	2	4	2	4
$\{d_i\}$		0.0299		0.0301		0.0302
	0.2068	0.0722	0.2117	0.0724	0.2133	0.0724
	0.2072	0.0723	0.2120	0.0724	0.2137	0.0725
		0.0300		0.0302		0.0303
$\lvert\phi - f\rvert_{\max}$	0.0288	0.0047	0.0248	0.0045	0.0234	0.0045
$\lvert\phi - f\rvert_{\mathrm{mean}}$	0.0162	0.0024	0.0152	0.0024	0.0151	0.0024

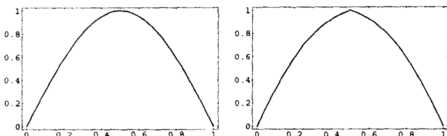


图 6.1

§ 6.4　分形插值拟合 (二)

在第四章中用迭代函数系恢复目标图象，由于目标集一般不具"仿射"自相似性，拼贴效果不是很好，在那里我们引入局部迭代函数系以改进效果．在曲线的拟合中会遇到同样问题．用 § 6.3 中叙述的方法，一般情况下效果并不理想．本节讨论用递归分形插值函数拟合，本质上就是分块方法．

记区间 $I=[0,1]$，M, N 是给定的正整数．令

$$R=\left\{\left[\frac{i}{MN},\frac{i+1}{MN}\right]\right\}_{i=0}^{MN-1},\quad P=\left\{\left[\frac{i}{MN},\frac{i+N}{MN}\right]\right\}_{i=0}^{(M-1)N},$$

并取定 P 的一个子集 D．称 R 中的每一个元素为子区间，D 中的每一个元素为父区间．

令 $A=\{0,1,\ldots,MN-1\}$，$B=\{0,1,\ldots,(M-1)N\}$，$C=\left\{i\middle|i\in B \text{ 且 } \left[\frac{i}{MN},\frac{i+N}{MN}\right]\in D\right\}$．定义映射 $\theta: A\to C$．于是对于 R 中每个子区间 $I_i=\left[\frac{i}{MN},\frac{i+N}{MN}\right]$，可根据 θ 来对应 D 中的惟一父区间 $D_i=\left[\frac{\theta(i)}{MN},\frac{\theta(i)+N}{MN}\right]$．

设 $\phi \in C(I)$ 是给定的目标函数. 令 $x_i = \dfrac{i}{MN}$, $i = 0, 1, \ldots, MN$. 构造函数系

$$\begin{cases} L_i(x), \\ F_i(x,y) = d_i y + h_\phi(L_i(x)) - d_i b_\phi(x), \end{cases} \quad i = 0, 1, \ldots, MN-1, \tag{6.4.1}$$

其中

1. 对于 $i = 0, 1, \ldots, MN-1$, L_i 是 $D_i \to I_i$ 的线性映射, 并满足条件

$$L_i\left(\frac{\theta(i)}{MN}\right) = \frac{i}{MN}, \quad L_i\left(\frac{\theta(i)+N}{MN}\right) = \frac{i+1}{MN};$$

2. 对于任意 $i = 0, 1, \ldots, MN-1$, 都有 $|d_i| \leqslant 1$;

3. $h_\phi, b_\phi \in C(I)$, 且满足条件:

$$h_\phi\left(\frac{i}{MN}\right) = \phi\left(\frac{i}{MN}\right), \quad \forall i = 0, 1, \ldots, MN,$$

$$\begin{cases} b_\phi\left(\frac{\theta(i)}{MN}\right) = \phi\left(\frac{\theta(i)}{MN}\right), \\ b_\phi\left(\frac{\theta(i)+N}{MN}\right) = \phi\left(\frac{\theta(i)+N}{MN}\right). \end{cases} \quad \forall i = 0, 1, \ldots, MN-1.$$

在实用上, 我们取 h_ϕ, b_ϕ 为通过插值节点的分段线性函数.

由 § 5.5 的定理 5.7 可知, (6.4.1) 确定了一个递归分形插值函数, 记为 f. 它满足下面的方程

$$f(x) = d_i f(L_i^{-1}(x)) - d_i b_\phi(L_i^{-1}(x)) + h_\phi(x), \ x \in I_i, \ \forall i. \tag{6.4.2}$$

为了讨论, 我们引入新的码空间

$$\widetilde{\Omega} \ = \ \{\widetilde{\omega} = (i_1, i_2, i_3, \ldots) | \, i_1 \in \{0, 1, \ldots, MN-1\},$$

$$i_k \in \{0,1,\ldots,N-1\}, k \geqslant 2\}.$$

定义算子 $\widetilde{\psi}$: $\widetilde{\Omega} \to [0,1]$:

$$\widetilde{\psi}(\widetilde{\omega}) = \frac{i_1}{MN} + \frac{1}{M}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{i_k}{N^k}, \quad 其中\ \widetilde{\omega} = (i_1, i_2, i_3, \ldots).$$

将 $\widetilde{\psi}(\widetilde{\omega})$ 简记作 $\widetilde{\psi}_{\widetilde{\omega}}$. 定义 $\widetilde{\Omega} \to \widetilde{\Omega}$ 上的映射 τ:

$$\tau\widetilde{\omega} = (\theta(i_1) + i_2, i_3, i_4, \ldots), \quad 其中\ \widetilde{\omega} = (i_1, i_2, i_3, \ldots).$$

又定义 $\widetilde{\Omega}$ 上的函数序列 $\{\eta_k\}$: $\forall \widetilde{\omega} = (i_1, i_2, i_3, \ldots)$，有

$$\eta_1(\widetilde{\omega}) = i_1, \quad \eta_k(\widetilde{\omega}) = \theta(\eta_{k-1}(\widetilde{\omega})) + i_k,\ k \geqslant 2.$$

借助于上述记号，我们可以将 (6.4.2) 式改写为

$$f\left(\widetilde{\psi}_{\widetilde{\omega}}\right) = d_{\eta_1(\widetilde{\omega})} f\left(\widetilde{\psi}_{\tau\widetilde{\omega}}\right) + h_\phi\left(\widetilde{\psi}_{\widetilde{\omega}}\right) - d_{\eta_1(\widetilde{\omega})} b_\phi\left(\widetilde{\psi}_{\tau\widetilde{\omega}}\right). \quad (6.4.3)$$

类似于定理 6.4 的证明，我们可以得到 (略去证明)

定理 6.6. 设 f 是由 (6.4.1) 确定的递归仿射分形插值函数，则有

$$f\left(\widetilde{\psi}_{\widetilde{\omega}}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} d_{\widetilde{\omega}(j)}(h_\phi - b_\phi)\left(\widetilde{\psi}_{\tau^j\widetilde{\omega}}\right) + h_\phi\left(\widetilde{\psi}_{\widetilde{\omega}}\right), \quad (6.4.4)$$

其中 $d_{\widetilde{\omega}(j)} \doteq d_{\eta_1(\widetilde{\omega})} d_{\eta_2(\widetilde{\omega})} \cdots d_{\eta_j(\widetilde{\omega})}$. □

与 (6.3.3) 类似，我们定义 $C(I)$ 中的插值函数 $\widetilde{H}_m : C(I) \to C(I)$ 如下，对任意 $g \in C(I)$，

$$\widetilde{H}_m(g)\left(\widetilde{\psi}_{\widetilde{\omega}}\right) = h_g\left(\widetilde{\psi}_{\widetilde{\omega}}\right) + \sum_{j=1}^{m} d_{\widetilde{\omega}(j)}(h_g - b_g)\left(\widetilde{\psi}_{\tau^j\widetilde{\omega}}\right). \quad (6.4.5)$$

不难验证 $\widetilde{H}_m(g)(x_i) = g(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, MN$，并且有

定理 6.7. 给定目标函数 $\phi \in C(I)$，设 f 是由 (6.4.1) 确定的递归仿射分形插值函数. 对于任意给定的正整数 m，令 $\widetilde{H}_m$ 是由 (6.4.5) 确定的插值算子. 令 $d = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant MN-1} |d_i|$，则

$$|\phi - f|_i \leqslant |\phi - \widetilde{H}_m(\phi)|_i + \frac{d^{m+1}}{1-d}|h_\phi - b_\phi|_i, \quad i = \infty, 2, \tag{6.4.6}$$

其中 $|\cdot|_\infty$，$|\cdot|_2$ 分别表示定义在 $C(I)$ 上的最大模范数和平方根范数. □

由定理 6.7，我们可以得到递归仿射分形插值函数拟合问题的求解方法．但与上节不同的是，此时除了参数 $\{d_i\}$ 外，还需确定 $\{\theta(i)\}$.

令

$$\widetilde{\Omega}_k = \big\{\widetilde{\omega} = (i_1, i_2, \ldots, i_k, \dot{0}) \;\big|\; 0 \leqslant i_1 \leqslant MN-1,$$
$$0 \leqslant i_j \leqslant N-1, j = 2, \ldots, k\big\}.$$

记

$$|g|_{\widetilde{\Omega}(k)} = \left\{ \sum_{\omega \in \widetilde{\Omega}(k)} \left(g\left(\widetilde{\psi}_{\widetilde{\omega}}\right)\right)^2 \right\}^{1/2}, \quad \forall g \in C(I).$$

我们将拟合问题转化为求下面优化问题的解:

$$\min_{\substack{\{d_i\} \\ \{\theta(i)\}}} |\phi - \widetilde{H}_m(\phi)|_{\widetilde{\Omega}(k)}. \tag{6.4.7}$$

解这个优化问题的一个方法是，对每一组固定的 $\{\theta(i)\}$，求出最佳的 $\{d_i\}$，然后通过比较，选择最佳的 $\{\theta(i)\}$ 和 $\{d_i\}$．但是该方法的一个缺陷是，当 M, N 增大时，计算量将急剧增加．如何能花

较少的时间，又获得较好的效果，是一个值得考虑的问题．在下面我们将提出这样的一个算法．

令 $\Gamma=\{0,N,2N,\ldots,(M-1)N\}$．对于任意的 $j\in\Gamma$，令 $J_j=\left[\frac{j}{MN},\frac{j+N}{MN}\right]$．定义 ϕ 与 $\widetilde{H}_m(\phi)$ 在 I_i 上关于 d_i 和 J_j 的一阶偏移度为

$$\delta_1(I_i,d_i,J_j)=\sum_{i_1=0}^{N-1}\left\{(\phi-h_\phi)\left(\frac{i}{MN}+\frac{i_1}{MN}\right)\right.\\ \left.-d_i(h_\phi-b_\phi)\left(\frac{j+i_1}{MN}\right)\right\}^2.$$

我们的方法是:

1. 对于 $i=0,1,\ldots,MN-1$,

   (a) 对于每一个 $j\in\Gamma$, 求解 $\min\limits_{d_i}\delta_1(I_i,d_i,J_j)$，记为 d_{ij}．计算对应的 $\delta_1(I_i,d_{ij},J_j)$.

   (b) 令 $C(i)=\{j\in\Gamma\,\big|\,|d_{ij}|<1\}$．选择 j_i^* 为所有 $j\in C(i)$ 中使得 $\delta_1(I_i,d_{ij},J_j)$ 取到最小值的 j．令 $\theta(i)=j_i^*$，$d_i^0=d_{ij_i^*}$.

2. 由上面确定的 $\{\theta(i)\}$ 以及 $\{d_i^0\}$，再利用阻尼最小二乘法解

$$\min_{d_i}|\phi-\widetilde{H}_m(\phi)|_{\widetilde{\Omega}(k)}.$$

但是对于振荡剧烈的目标函数，由于一阶偏移度中的函数取值点太少，由上述 (1) 中所确定的 $\{\theta(i)\}$ 往往不是最佳的，所以我们定义 ϕ 与 $\widetilde{H}_m(\phi)$ 在 I_i 上关于 d_i 和 J_j 的 t 阶偏移度:

$$\delta_t(I_i,d_i,J_j)=\sum_{\substack{\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}_t\\ \eta_1(\tilde{\omega})=i}}\left\{(\phi-h_\phi)\left(\widetilde{\psi}_{\tilde{\omega}}\right)\right.$$

$$-d_i(h_\phi - b_\phi)\left(\widetilde{\psi}_{\pi_j\widetilde{\omega}}\right)\Big\}^2,$$

其中当 $\widetilde{\omega}=(i,i_2,i_3,\ldots)$ 时，$\pi_j\widetilde{\omega}=(j+i_2,i_3,i_4,\ldots)$. 一般地，可取 $t=4,5,6$ 等. 利用 t 阶偏移度，我们将上面的算法进行修改，把步骤 (1) 中的一阶偏移度改为 t 阶偏移度，而步骤 (2) 保持不变.

例 6.5. 设 $\phi(x)=0.4\sin(10x)+0.3\cos(20x)+0.8x$，$x\in[0,1]$. 设 f 是利用 6 阶偏移度对应的算法所得到的递归仿射函数. 现将计算结果列于表 6.3 (N 取 2). 图 6.2 的左边是 ϕ 的图象，右边是 $k=4, M=4$ 时的递归仿射分形插值函数.

表 6.3 例 6.5 的计算结果

k	2		3		4	
M	4	6	4	6	4	6
$\lvert\phi-f\rvert_{\max}$	0.0775	0.0168	0.0592	0.0160	0.0583	0.0160
$\lvert\phi-f\rvert_{\text{mean}}$	0.0299	0.0066	0.0228	0.0058	0.0223	0.0058

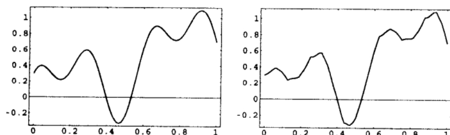


图 6.2

例 6.6. 设 ϕ 为 Weierstrass 函数:

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)i} \sin(\lambda^i)x, \quad 其中\ \lambda = 2, s = 1.5, x \in [0,1].$$

令 f 是利用 6 阶偏移度对应的算法所得到的递归仿射分形插值函数. 现将计算结果列于表 6.4 (N 取 2). 图 6.3 的左边是 ϕ 的图象, 右边是 $k=5, M=8$ 时的递归仿射分形插值函数.

表 6.4 例 6.6 的计算结果

k	3		4		5	
M	3	8	3	8	3	8
$\lvert\phi - f\rvert_{\max}$	0.4741	0.3896	0.4707	0.3444	0.4709	0.3135
$\lvert\phi - f\rvert_{\text{mean}}$	0.1791	0.0904	0.1753	0.0865	0.1734	0.0852

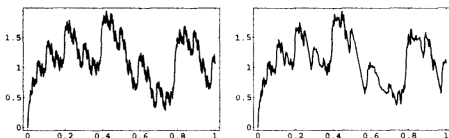


图 6.3

参考文献

[1] Barnsley M F. Fractal functions and interpolation. Constr Approx, 1986, 2: 303 – 329.

[2] Barnsley M F. Fractal everywhere. New York: Academic press, 1988.

[3] Barnsley M F, Deliu A and Xie R. Stationary stochastic processes and fractal data compression. International Journal of Bifurcation and chaos, 1997, 7: 551 – 567.

[4] Barnsley M F and Demko S. Iterated function systmes and the global construction of fractals. Proc Roy Soc Lond A, 1985, 399: 243 – 275.

[5] Barnsley M F, Elton J H and Hardin D P. Recurrent iterated function systems. Constr Approx, 1989, 5: 3 – 31.

[6] Barnsley M F, Elton J H, Hardin D P and Massopust P R. Hidden variable fractal interpolation functions. SIAM J Math Anal, 1989, 20: 1218 – 1242.

[7] Barnsley M F and Harrington A N. The calculus of fractal interpolation functions. J Approx Th, 1989, 57: 14 - 34.

[8] Barnsley M F and Hurd L P. Fractal image compression. Wellesley, Massachusetts: AK Peters, 1993.

[9] 常杰，陈刚，葛滢. 植物结构的分形特征及模拟. 杭州：杭州大学出版社，1995.

[10] 陈刚. 关于分形插值函数的研究以及分形图像分析中的若干论题. 浙江大学博士学位论文，1994.

[11] Chen G. The smoothness and dimension of fractal interpolation function. Appl Math - JCU B, 1996, 11: 409 - 418.

[12] 陈守吉，张立明. 分形与图象压缩. 上海：上海科技教育出版社，1998.

[13] Dalla L and Drakopoulos V. On the parameter identification problem in the plane and the polar fractal interpolation functions. J Approx Th, 1999, 101: 289 — 302.

[14] Edgar G A. Measure, topology and fractal geometry. New York: Springer-Verlag, 1990.

[15] Elton J H. An ergodic theorem for iterated maps. Ergod Th Dynam Sys, 1987, 7: 481 - 488.

[16] Falconer K J. Fractal geometry: Mathematical fundation and applications. New York: Wiley, 1990.

[17] Falconer K J. Techniques in fractal geometry. New York: Wiley, 1997.

[18] 冯敬海. 关于 Subordinator 的指数和维数. 高校应用数学学报, 1998, 13 (4): 427 - 432.

[19] Feng J H and Sha Z. Packing measure functions of subordinators sample paths. Sci China Ser A, 1998, 41 (5): 505 - 509.

[20] Feng J H and Xi L F. Constructions of the invariant set and invariant measures. Appl Math - JCU B, 1997, 12: 363 - 370.

[21] Hutchinson J E. Fractal and self-similarity. Indiana Univ Math J, 1981, 30 (5): 713 - 747.

[22] 金以文, 鲁世杰. 分形几何原理及其应用. 杭州: 浙江大学出版社, 1998.

[23] Lasota A and Mackey M C. Chaos, fractals and noise stochastic aspects of dynamics (Second Edition), Applied mathematical sciences 97. New York: Springer-Verlag, 1994.

[24] 李乔. 矩阵论八讲. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.

[25] 洛伦茨 G G 著, 谢庭藩, 施咸亮译. 函数逼近论. 上海: 上海科学技术出版社, 1981.

[26] Mandelbrot B B. The fractal geometry of nature. New York: W H Freeman, 1982.

[27] Massopust P R. Fractal functions, fractal surfaces and wavelets. New York: Academic press, 1994.

[28] Mazel D S and Hayes M H. Using iterated function system to model discrete sequences. IEEE Trans. on Signal, 1992, 40 (7): 1724 — 1734.

[29] 纳唐松 И П 著，徐家福，郑维行译．函数构造论．北京：科学出版社，1965．

[30] Peityen H O and Richter P H. The Beauty of fractals. New York: Springer-Verlag，1986．

[31] 齐东旭．分形及其计算机生成．北京：科学出版社，1994．

[32] 钱晓元．分形插值函数研究．大连：大连理工大学博士论文，1997.

[33] 阮火军．递归 IFS 维数公式的推广．浙江大学学报(理学版)，2000，27 (3)：243 - 246.

[34] Ruan H J and Sha Z. Solving inverse problems of FIF by interpolating operator. Chinese J Numer Math Appl, 2000, 22 (3): 1 - 11.

[35] 阮火军，沙震．分块分形插值拟合与遗传算法．高校应用数学学报，2001，16 (3)：263 - 268.

[36] Ruan H J, Sha Z and Su W Y. Counterexample in parameter identification problem of the fractal interpolation functions. J Approx Th, 2003, 122: 121 – 128.

[37] Ruan H J, Sha Z and Su W Y. Parameter identification problem of the fractal interpolation functions. Numer Math – JCU, 2003, 12 (2): 205- 213.

[38] 阮火军，沙震，叶懋冬. Barnsley-Elton-Hardin 的一个定理的修正. 高校应用数学学报，2000，15 (2): 157 – 162.

[39] Sha Z. Hölder property of fractal interpolation. J Approx Th Appl, 1992, 8 (4): 45 – 57.

[40] Sha Z. A class of functional equation and fractal interpolation functions. Appl Math – JCU B, 1999, 14: 90 – 98.

[41] Sha Z and Chen G. Haar expansions of a class of fractal interpolation functions and their logical derivations. J Approx Th Appl, 1993, 9 (4): 73 – 88.

[42] 沙震，刘寅立. 分形插值函数的误差. 高校应用数学学报，2004，19 (2)：193 – 202.

[43] 王东生，曹磊. 混沌、分形及其应用. 安徽：中国科技大学出版社，1995.

[44] 王国忠. 分形曲线与曲面的维数及其可微性. 杭州：浙江大学博士学位论文，1994.

[45] Wang G Z. Dimension and differentiability of a class of fractal interpolation functions. Appl Math – JCU B, 1996, 11: 85 – 100 .

[46] 文志英. 分形几何的数学基础. 上海: 上海科技教育出版社, 2000.

[47] 文志英, 范爱华, 文志雄等. 分形几何理论与应用. 杭州: 浙江科学技术出版社, 1998.

[48] 奚李峰. 结合符号空间的均方变差指标与随机幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \pm s_n \lambda^n$. 杭州: 浙江大学博士学位论文, 1997.

[49] Xi L F. Calculus on Cantor triadic set (I) – derivative. Appl Math – JCU B, 1997, 12: 483 – 492.

[50] 谢和平, 薛秀谦. 分形应用中的数学基础与方法. 北京: 科学出版社, 1997.

[51] 曾文曲, 王向阳等. 分形理论与分形的计算机模拟(修订版). 沈阳: 东北大学出版社, 2001.

索引